NÉV: ............................................................... NEPTUN-KÓD: .................................... SZAK: .................

ELŐADÓ: Pete Gábor GYAKVEZ.:.................................

**Valószínűségszámítás Vizsga1, 2013. dec. 23.**
*Munkaidő: 100 perc. Kalkulátor nem használható.*
**MEGOLDÁSOK**

**Elm. 1** (a) Mi az, hogy egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, azaz mi ez a három hozzávaló, mik a definiáló tulajdonságaik? **(7 p)**

(b) Mi az, hogy diszkrét, és mi az, hogy (abszolút) folytonos valószínűségi változó? **(4 p)**

(c) Mit jelent az, hogy az $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók függetlenek? **(3 p)**

(d) Igazold független valószínűségi változókra, hogy várható értékük összeszorzódik, szórásnégyzetük összeadódik: $\mathbb{E}[XY] = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$ és $\mathbb{D}^2[X+Y] = \mathbb{D}^2X + \mathbb{D}^2Y$. Lehet diszkrétekre vagy folytonosakra, ahogy tetszik. **(7 p)**

**Megoldás:** A Balázs M. – Tóth B. jegyzetben könnyen megkereshetőek a válaszok. Amit kiemelnék:

(b) Nem világos, mi az, hogy „csak diszkrét értékeket” vehet föl valami. Ha egy eloszlás tartója az összes racionális szám, az is egy diszkrét eloszlás, mert megszámlálható sok értéket vehet föl, pedig $\mathbb{Q}$ nem egy diszkrét halmaz.

Folytonos eloszláson néha azt értik, hogy az eloszlásfgve mindenhol folytonos, néha pedig azt, hogy abszolút folytonos, ami azt jelenti, hogy egy nemnegatív mérhető fgv integráljaként áll elő. Mindkettőt elfogadtuk.

(c) Arra csak részpontot adtunk, hogy $\mathbb{P}[XY] = \mathbb{P}[X]\mathbb{P}[Y]$, ugyanis ennek nincs értelme, mert $X$ nem egy esemény, hanem egy változó. Annak még kevésbé van értelme, hogy $\mathbb{P}[X \cap Y] = \mathbb{P}[X]\mathbb{P}[Y]$, ugyanis két véletlen számnak nagyon nem lehet a metszetét venni. A $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ vagy $p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)$ formulák már jobbak, ahol a $p$ diszkrét súlyfüggvényt vagy sűrűségfgvt is jelenthet, de egyrészt ezeket definiálni kéne (ami pláne a folytonos esetben nemtriviális), másrészt mi van, ha a változók se nem diszkrétek, se nem folytonosak? Tehát az kell, hogy $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ az eloszlásfgvekre, ahol érdemes definálni, mik ezek. De a legjobb megoldás, hogy $\mathbb{P}[X \in A, Y \in B] = \mathbb{P}[X \in A]\,\mathbb{P}[Y \in B]$ tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre, ugyanis ez tetszőleges értékkészletű valváltozókra működik, nem csak valósakra.

**Elm. 2** (a) Definiáld a $\mathsf{Binom}(n,p)$ eloszlást! Valamelyik tanult módszerrel számold ki várható értékét és szórását. **(7 p)**

(b) Írd föl az $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ normális változó sűrűségfüggvényét, és igazold, hogy tényleg egy sűrűségfüggvény. **(7 p)**

(c) Tekintsük a 100-dimenziós egységoldalú hiperkocka csúcsait: $\{0,1\}^{100} \subset \mathbb{R}^{100}$. Válasszunk a csúcsok közül egyet egyenletesen, legyen ez $U$. Mi körülbelül a valószínűsége, hogy $U$ legalább kétszer olyan távol van a $(0,\dots,0)$ ponttól (az euklideszi metrikában) mint az $(1,\dots,1)$-től? *(Tipp: standard normális táblázat a hátoldalon.)* **(9 p)**

**Megoldás:** Az (a,b) részekhez megint csak lásd a jegyzetet. A (c)-hez: Legyen az 1-es koordináták száma $U$-ban $X$. Persze ez $\mathsf{Binom}(n, 1/2)$ eloszlású, $n = 100$. Továbbá $\|U - \underline{0}\|^2 = X$ és $\|U - \underline{1}\|^2 = n - X$. Tehát

$$\mathbb{P}\big[\|U - \underline{0}\| > 2\|U - \underline{1}\|\big] = \mathbb{P}[X > 4(n-X)] = \mathbb{P}[X > 4n/5]\,,$$

és ezután normális approximációja binomnak. $\approx 1 - \Phi(6) \approx 0$ a végeredmény. (Ezt egy kicsit elrontottam: az első változat az volt, hogy az $U$-t levetítjük merőlegesen az $x \mapsto (x, x, \dots, x)$ diagonális egyenesre, és a vetített pont távolsága kétszer akkora $\underline{0}$-tól mint $\underline{1}$-től, ekkor $1 - \Phi(3.33)$ jön ki.)

**Elm. 3** (a) Igazold, hogy az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás momentumgeneráló függvénye $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, ahol $t \in (-\infty, \lambda)$. **(5 p)**

(b) Számold ki az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás $k$-adik momentumát, $k = 0, 1, 2, \ldots$. **(5 p)**

**Megoldás:** (a) $M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)}\right]_0^\infty$, ami $+\infty$, ha $t \geq \lambda$, és $\frac{\lambda}{\lambda - t}$, ha $t < \lambda$.

(b) $\mathbb{E}[X^k] = M^{(k)}(t)\big|_{t=0} = \frac{k!\,\lambda}{(\lambda-t)^{k+1}}\big|_{t=0} = \frac{k!}{\lambda^k}$.

**Gyak. 1** **(Karácsonyi feladat)** Nagykovácsi fölött ritkán, de azért szoktak látni Öldöklő illetve Bőséghozó Angyalokat, két, egymástól független Poisson folyamat szerint, 120 évente várható értékben egyet-egyet. Nagykovácsi dédnagyapám igen egészségesen él, most 147 éves, és csak a következő Öldöklő Angyal felbukkanásakor fog meghalni.

(a) Mi a valószínűsége, hogy dédnagyapám megéri a 200. születésnapját? **(3 p)**

(b) Várható értékben hány Bőséghozó Angyalt fog dédnagyapám a hátralevő életében látni? **(7 p)**

(c) Dédnagyapám példamutató élete fölkeltette az Ördög figyelmét, aki üzletet ajánl a lelkéért: ahány éves korában meghal (ez lehet törtszám is), azt annyiadik hatványra emelik ahány Bőséghozó Angyal elrepült Nagykovácsi fölött életének utolsó éve alatt, és ennyi dukátot kap a dédnagyapám által meghatározott jótékony cél. Ha elfogadja az üzletet, várható értékben mekkora összeggel gazdagszik az a cél? *(Tipp: használd az* Elm. 3 *feladatot.)* **(8 p)**

**Megoldás:** (a) $\lambda = 1/120$ intenzitású Poisson folyamatokról van szó. Mostantól számítva az első Öldöklő érkezésének ideje $T \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$. Ezért $\mathbb{P}[\text{élet} \geq 200 \,|\, \text{élet} \geq 147] = \mathbb{P}[T \geq 53] = e^{-53/120}$.

(b) **Egyik út:** $\mathbb{E}[B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[B \,|\, T]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathsf{Poi}(\lambda T) \,|\, T]] = \mathbb{E}[\lambda T] = 1$.

Figyelem! Sokan azt írták, lényegében, hogy $\mathbb{E}[\mathsf{Poi}(\lambda \mathbb{E} T)]$. Szavakkal: „világos, hogy $\mathbb{E}[T]\lambda$ kell”. De ez csak véletlenül jó, csak mert $\mathbb{E}[\mathsf{Poi}(\lambda t)]$ lineáris $t$-ben. Általában, ha $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris, akkor $f(\mathbb{E}T) \neq \mathbb{E}f(T)$, ezért létezik pld a szórás fogalma.

**Másik út:** Vagy Bőséghozó vagy Öldöklő jön elébb, 1/2-1/2 valszínnel. Ha Bőséghozó, akkor örökifjúság miatt megint vagy-vagy. Stb. Tehát $\mathbb{P}[B = k] = 2^{-(k+1)}$ pesszimista geometriai, és $\mathbb{E}[B] = 1$.

(c) Legyen $\beta$ az utolsó évbeli Bőséghozók száma, $\mathsf{Exp}(\mu)$ eloszlású, fgtlen $T$-től, ahol $\mu = \lambda = 1/120$, de tartsuk meg $\mu$-nek a jelölést, hogy világosabb legyen, mi történik. A fgtlenség miatt:

$$\mathbb{E}[(147+T)^\beta] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}[(147+T)^k]\mathbb{P}[\beta = k] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^\infty (147+T)^k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{(147+T)\mu}\right] e^{-\mu} = e^{146\mu}\mathbb{E}[e^{\mu T}]\,.$$

Az első tényező $e^{146/120}$, de a második $+\infty$, hisz $\mu = 1/120$ éppen a $T$ momentumgenerálójának konvergenciasugara. Végtelen a várható érték — az Ördög egész rendes ajánlatot tett.

Megjegyzendő, hogy $\mathbb{E}[T^\beta] \neq \mathbb{E}[T]^{\mathbb{E}[\beta]}$, nagyon nem.

**Gyak. 2** Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független $\mathsf{Egyenletes}[0,1]$ eloszlású pontok. Sorbarendezzük őket, kapjuk az $X_1^* < \cdots < X_n^*$ sorozatot.

(a) Legyen $n = 2$. Határozd meg $X_1^*$ és $X_2^*$ kovarianciáját. **(15 p)**

(b) Most legyen $n = 2k+1$. Írd fel a középső $X_{k+1}^*$ pont sűrűségfüggvényét. **(6 p)**

(c) Igazold, hogy minden $\epsilon > 0$-ra, $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left[|X_{k+1}^* - 1/2| > \epsilon\right] = 0$. *(Tipp: használd a Bernoulli Nagy Számok Törvényét.)* **(7 p)**

**Megoldás:** (a) Ugyebár $\mathbb{E}[X_1^* X_2^*] - (\mathbb{E}X_1^*)(\mathbb{E}X_2^*)$-re van szükségünk, és nyilván pozitív lesz az eredmény, hiszen ha $X_1^*$ nagy, az $X_2^*$-t is növeli.

**Egyik út:** világos, hogy $(X_1^*, X_2^*)$ közös sűrűségfgve $f(x,y) = 2 \cdot \mathbf{1}_{\{0 \le x \le y \le 1\}}$, egyenletes egy háromszögön, pld mert $0 \le x \le y \le 1$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1^* \in (x, x+dx), X_2^* \in (y, y+dy)] &= \mathbb{P}[\text{ugyanez}, X_1 < X_2] + \mathbb{P}[\text{ugyanez}, X_2 < X_1] \\ = \mathbb{P}[X_1 \in (x,x+dx), X_2 \in (y,y+dy)] &+ \mathbb{P}[X_2 \in (x,x+dx), X_1 \in (y,y+dy)] \\ &= 2\,dx\,dy\,.\end{aligned}$$

Innen lehet integrálgatni, marginálisokat kapni, stb.

**Másik út:** $\mathbb{P}[X_1^* > t] = \mathbb{P}[X_1 > t, X_2 > t] = (1-t)^2$. Innen sűrűségfgve $2(1-t)$, de ez nem is kell egyelőre, mert $\mathbb{E}[X_1^*] = \int_0^1 \mathbb{P}[X_1^* > t]dt = 1/3$. Szimmetria-okokból akkor $\mathbb{E}[X_2^*] = 2/3$. És $\mathbb{E}[X_1^* X_2^*] = \mathbb{E}[X_1 X_2] = (\mathbb{E}X_1)(\mathbb{E}X_2) = 1/4$, hiszen $\{X_1^*, X_2^*\} = \{X_1, X_2\}$. Aki ezt a trükköt nem veszi észre, annak egy másik:

$$\mathbb{E}[X_1^* X_2^*] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_1^* X_2^* \mid X_1^*]\big] = \mathbb{E}\big[X_1^*(X_1^*+1)/2\big] = \int_0^1 t(t+1)/2 \cdot 2(1-t)\,dt = 1/4.$$

Sokan fölírtak olyasmiket, hogy „$\mathbb{E}[X_1^* \mid X_1 < X_2] = \mathbb{E}[X_1 \mid X_1 < X_2] = \mathbb{E}[X_1]$, mert $X_1$ és $X_2$ fgtelenek”. Ez nem igaz, mert az $\{X_1 < X_2\}$ feltétel nem fgtlen $X_1$-től, miért lenne; nyilván csökkenti $X_1$ várható értékét.

(b)

$$\mathbb{P}[X_{k+1}^* \in (x, x+dx)] \approx \binom{2k+1}{k} x^k \binom{k+1}{1} dx \binom{k}{k} (1-x)^k\,.$$

(c) Azért írtam, hogy Bernoulli NSZT, mert nem $X_i$-ket vagy $X_{k+1}^*$-eket kell nekiállni összeadni, hanem Bernoulli változókat. Ugyanis $\{X_{k+1}^* < 1/2 - \epsilon\} = \{Y_\epsilon \ge k+1\}$, ahol

$$Y_\epsilon := \#\big\{1 \le i \le 2k+1 : X_i < 1/2 - \epsilon\big\} \sim \mathsf{Binom}(2k+1, 1/2-\epsilon)\,.$$

A Bernoulli NSZT szerint $\mathbb{P}[Y_\epsilon \ge k+1] = \mathbb{P}[Y_\epsilon/(2k+1) \ge (k+1)/(2k+1)] \to 0$, hiszen $\lim_{k\to\infty}(k+1)/(2k+1) > 1/2 - \epsilon$. Hasonlóan $\mathbb{P}[X_{k+1}^* > 1/2 + \epsilon] \to 0$.

$\Phi(z)$

| $z$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |