NÉV: ............................................................... NEPTUN-KÓD: .................................... SZAK: .................

ELŐADÓ: Pete Gábor GYAKVEZ.:..................................

**Valószínűségszámítás Vizsga2, 2014. jan. 10.**
*A legnehezebb feladat megoldása.*

**Gyak. 3.** Nagykovácsiból Budapestre dél körül minden óra :24-kor és :54-kor van busz. A megállóba egy Egyenletes[12:00,12:30] eloszlású véletlen időpontban érkezek. Elkezdek stoppolni; az autók egy 1/(10 perc) intenzitású Poisson folyamat szerint vesznek föl.

(a) Mi a valószínűsége, hogy végül mégis busszal megyek? **(8 p)**

(b) Föltéve, hogy végül a busz jön hamarabb, várhatóan mennyit kell rá várnom? **(9 p)**

(c) Ha hirtelen meggondolom magam, és egyszerűen megvárom a következő buszt, várhatóan hány autót szalasztok el, mekkora szórással? **(4+5 p)**

**Megoldás. (a)**

Legyen $A \in [0,\infty)$ az első engem fölvevő autó megérkezésének ideje, $\mathsf{Exp}(1/10)$ eloszlású, $B \in [0,30]$ a buszé. „Jancsi és Juliska találkoznak-e" stílusban megkeressük a sík azon pontjait, ahol az esemény teljesül, és integráljuk a közös sűrűségfgv-t, ami a fgtlenség miatt a marginálisok szorzata:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B < A] &= \int_0^{30}\int_b^{\infty} f(a,b)\,da\,db = \int_0^{30}\frac{1}{30}\mathbb{P}[A > b]\,db = \int_0^{30}\frac{1}{30}e^{-b/10}\,db\\ &= \frac{1}{30}\left[-10e^{-b/10}\right]_0^{30} = \frac{1}{3}(e^0 - e^{-3})\,.\end{aligned}$$

Úgy is lehet mondani, hogy először kondícionálunk $B$ értékére:

$$\mathbb{P}[B < A] = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}[B < A \mid B]\big] = \mathbb{E}[e^{-B/10}]\,.$$

**Megoldás. (b)**

$$\mathbb{E}[B|B < A] = \int_0^{30}\mathbb{P}[B > t|B < A]\,dt = \int_0^{30}\frac{\mathbb{P}[t < B < A]}{\mathbb{P}[B < A]}\,dt\,.$$

A nevezőt már tudjuk az (a) részből. A $\mathbb{P}[t < B < A]$ valószínűséget megint fölírhatjuk egy síkrész fölötti kettős integrállal, avagy $\int da$ után:

$$\mathbb{P}[t < B < A] = \int_t^{30}\frac{1}{30}\mathbb{P}[A > b]\,db = stb\,.$$

**Megoldás. (c)**

A toronyszabályt használjuk. Legyen $N$ az elszalasztott autók száma. $N \mid B \sim \mathsf{Poi}(B/10)$.
Tehát $\mathbb{E}[N \mid B] = B/10$ és $\mathbb{D}^2[N \mid B] = B/10$.
Ebből $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[B/10] = 3/2$, a feltételes szórásnégyzet formulával pedig

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2[N] &= \mathbb{D}^2\big[\mathbb{E}[N \mid B]\big] + \mathbb{E}\big[\mathbb{D}^2[N \mid B]\big]\\ &= \mathbb{D}^2[B/10] + \mathbb{E}[B/10] = \frac{1}{100}\frac{900}{12} + \frac{15}{10} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}\,.\end{aligned}$$