

NÉV: NEPTUN-KÓD: SZAK:

ELŐADÓ: Pete Gábor

GYAKVEZ.:

Valószínűségszámítás Vizsga3, 2014. jan. 17.
Munkaidő: 100 perc. Kalkulátor nem használható.

Elm. 1. Legyen U egyenletes eloszlású a $[0, \pi]$ intervallumon, és $X = \sin(U)$.

- (a) Írjuk le X eloszlásfüggvényét! (5p)
- (b) Számoljuk ki X várható értékét, (5p)
- (c) és szórásnégyzetét! (5p)

Elm. 2. (a) Mondd ki a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget az $\mathbb{E}[XY]$ belsőszorzásra. Igazold a segítségével, hogy két változó $\rho(X, Y)$ korrelációs együtthatója mindig -1 és 1 között van. (7p)

(b) Adj egy példát, hogy $\rho(X, Y) = 0$, de X és Y nem függetlenek. (5p)

Elm. 3. (a) Ha X és Y független valószínűségi változók, hogyan kaphatjuk meg az $M_{X+Y}(t)$ momentumgeneráló függvényt az $M_X(t)$ és $M_Y(t)$ momentumgenerálók segítségével? (Bizonyítsd is.) (5p)

(b) Írd föl az $N(\mu, \sigma^2)$ normális változó momentumgeneráló függvényét (bizonyítással). (7p)

(c) Az (a) és (b) részek segítségével igazold, hogy ha $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ és $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ függetlenek, akkor $X + Y$ is normális. Mekkora a várható értéke és a szórásnégyzete? (5p)

Gyak. 1. A Jó Kenyér pékség kalácsában szeletenként átlag 3, a Príma Pék kalácsában szeletenként átlag 2 mazsola van. Nagyjából minden másnap bemegyek valamelyik pékségbe, $1/2$ valószínűséggel az egyikbe, $1/2$ -del a másikba, és veszek egy 16 szeletből álló egész kalácsot.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy van mazsola az első szelet kalácsomban? (4 p)
- (b) Volt benne mazsola. Mi a valószínűsége, hogy a Jó Kenyér pékségtől van a kalács? (5p)
- (c) Ha az első szeletben volt mazsola, mi a valószínűsége, hogy a másodikban legalább kettő is lesz? (7p)

Gyak. 2. Az előző feladatban leírt körülményekkel:

- (a) Ha minden kalácsból négy szeletet eszek meg (kettőt frissen, kettőt másnap, a többi a családom), átlagosan hány mazsolát kapok én, mekkora szórással? (Segítség: a $\text{Poi}(\lambda)$ szórása $\sqrt{\lambda}$, és ne feledkezzünk el a feltételes szórásnégyzet formuláról.) (3+9 p)
- (b) Ha egy év alatt 100-szor veszek kalácsot, mi a valószínűsége, hogy 1070-nél is több mazsolát fogok megenni? (Kellhet, hogy $\sqrt{3.5} \approx 1.87$, $\sqrt{3.55} \approx 1.88$.) (7p)

Gyak. 3. Legyenek X és Y független $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók.

- (a) Határozd meg $(X, X + Y)$ együttes sűrűségfüggvényét. (7p)
- (b) Határozd meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét. (7p)
- (c) Föltéve, hogy $X + Y = z$, valamilyen fix $z > 0$ -ra, milyen eloszlású az X ? (7p)

(Figyeljünk a határookra!)

NÉV: NEPTUN-KÓD: SZAK:

ELŐADÓ: Pete Gábor

GYAKVEZ.:

Valószínűségszámítás Vizsga3, 2014. jan. 17.
Munkaidő: 100 perc. Kalkulátor nem használható.

Elm. 1. Legyen U egyenletes eloszlású a $[0, \pi]$ intervallumon, és $X = \sin(U)$.

- (a) Írjuk le X eloszlásfüggvényét! (5p)
- (b) Számoljuk ki X várható értékét, (5p)
- (c) és szórásnégyzetét! (5p)

Elm. 2. (a) Mondd ki a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget az $\mathbb{E}[XY]$ belsőszorzásra. Igazold a segítségével, hogy két változó $\rho(X, Y)$ korrelációs együtthatója mindig -1 és 1 között van. (7p)

(b) Adj egy példát, hogy $\rho(X, Y) = 0$, de X és Y nem függetlenek. (5p)

Elm. 3. (a) Ha X és Y független valószínűségi változók, hogyan kaphatjuk meg az $M_{X+Y}(t)$ momentumgeneráló függvényt az $M_X(t)$ és $M_Y(t)$ momentumgenerálók segítségével? (Bizonyítsd is.) (5p)

(b) Írd föl az $N(\mu, \sigma^2)$ normális változó momentumgeneráló függvényét (bizonyítással). (7p)

(c) Az (a) és (b) részek segítségével igazold, hogy ha $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ és $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ függetlenek, akkor $X + Y$ is normális. Mekkora a várható értéke és a szórásnégyzete? (5p)

Gyak. 1. A Jó Kenyér pékség kalácsában szeletenként átlag 3, a Príma Pék kalácsában szeletenként átlag 2 mazsola van. Nagyjából minden másnap bemegyek valamelyik pékségbe, $1/2$ valószínűséggel az egyikbe, $1/2$ -del a másikba, és veszek egy 16 szeletből álló egész kalácsot.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy van mazsola az első szelet kalácsomban? (4 p)
- (b) Volt benne mazsola. Mi a valószínűsége, hogy a Jó Kenyér pékségtől van a kalács? (5p)
- (c) Ha az első szeletben volt mazsola, mi a valószínűsége, hogy a másodikban legalább kettő is lesz? (7p)

Gyak. 2. Az előző feladatban leírt körülményekkel:

- (a) Ha minden kalácsból négy szeletet eszek meg (kettőt frissen, kettőt másnap, a többi a családom), átlagosan hány mazsolát kapok én, mekkora szórással? (Segítség: a $\text{Poi}(\lambda)$ szórása $\sqrt{\lambda}$, és ne feledkezzünk el a feltételes szórásnégyzet formuláról.) (3+9 p)
- (b) Ha egy év alatt 100-szor veszek kalácsot, mi a valószínűsége, hogy 1070-nél is több mazsolát fogok megenni? (Kellhet, hogy $\sqrt{3.5} \approx 1.87$, $\sqrt{3.55} \approx 1.88$.) (7p)

Gyak. 3. Legyenek X és Y független $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók.

- (a) Határozd meg $(X, X + Y)$ együttes sűrűségfüggvényét. (7p)
- (b) Határozd meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét. (7p)
- (c) Föltéve, hogy $X + Y = z$, valamilyen fix $z > 0$ -ra, milyen eloszlású az X ? (7p)

(Figyeljünk a határookra!)

