**Valószínűségszámítás pótkurzushoz extra témák és feladatok, 2015. tavasz**

## I. Kovariancia és korrelációs együttható, Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség.

1. (a) Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg $\mathbf{E}[(2 + X)^2]$ és $\mathbf{D}^2(4 + 3X)$ értékét.
   (b) Legyenek $X$ és $Y$ f. a. e. valváltozók $\mu$ várható értékkel és $\sigma$ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

2. Legyen az $(X, Y)$ pont egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott háromszögben.
   (a) Mi lesz az $(X, Y)$ kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?
   (b) Legyen $Z = X + 2Y$. Mi lesz az $(X, Z)$ kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

3. (a) Legyen $X$ az a szám, ahányszor 1-est látunk, $Y$ az a szám, ahányszor 2-est látunk, ha $n$-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.
   (b) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen $X$ a dobások összege, és $Y$ az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t. Függetlenek-e $X$ és $Y$?

4. $X$ és $Y$ együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.
   (b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X^2|Y = y)$-t is.

5. Legyenek $0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ számok. Igazoljuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség segítségével az Ötéves Gyerek Lemmájának egyszerűbb változatát: az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok $\pi$ permutációra az $s(\pi) := \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\pi(i)}$ összeget maximalizálja a $\pi = \mathrm{id}$ választás.

6. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független Egyenletes$[0, 1]$ eloszlású pontok. Sorbarendezzük őket, kapjuk az $X_1^* < \cdots < X_n^*$ sorozatot.
   (a) Legyen $n = 2$. Határozd meg $X_1^*$ és $X_2^*$ kovarianciáját.
   (b) Most legyen $n = 2k + 1$. Írd fel a középső $X_{k+1}^*$ pont sűrűségfüggvényét.
   (c) Igazold, hogy minden $\epsilon > 0$-ra, $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\big[|X_{k+1}^* - 1/2| > \epsilon\big] = 0$. *(Tipp: Bernoulli Nagy Számok Törvénye.)*

## II. Indikátor változók összegének várható értéke és szórása.

7. (a) Mi a valószínűsége, hogy $n$ elem egy egyenletesen választott permutációjának pontosan egy fixpontja van? Mi történik, ha $n \to \infty$?
   (b) Mekkora a fixpontok számának várható értéke?

8. Legyenek $X$ és $Y$ függetlenek, Binom$(n, p)$ illetve Binom$(m, p)$ eloszlással.
   (a) Számoljuk ki az $\mathbb{E}[X \mid X + Y = k]$ feltételes várható értéket.
   (b) Mennyi $\mathbb{P}[X + Y = k]$?
   (c) Milyen ellenőrzést csinálhatunk az (a) és (b) helyességéről a várható érték toronyszabályának segítségével?

9. 20 farkas mindegyike ráveti magát 20 nyúl valamelyikére, teljesen véletlenszerűen, egy nyúlra akár több farkas is.
   (a) Várható értékben hány nyúl ússza meg a kalandot?
   (b) Mekkora szórással?

10. Tekintsük az Erdős-Rényi $G(n, p)$ véletlen gráfot: $n$ csúcs van, és az $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyike egymástól függetlenül $p \in (0, 1)$ valószínűséggel van behúzva. Legyen $N$ a részgráfként jelenlévő háromszögek száma.
   (a) Adjuk meg $N$ várható értékét,
   (b) és szórását!
   (c) Igazoljuk, hogy ha $p = p_n$-re $np_n \to 0$ teljesül, akkor 0-hoz tartó valószínűséggel van a gráfban háromszög.
   (d) Mi történik a háromszögtartalmazás valószínűségével, ha $np_n \to \infty$?

**III. Feltételes várható érték és szórás.**

11. Választunk a számegyenesen egy véletlen $X$ pontot, $\lambda$ várható értékű exponenciális eloszlással, majd vesszük ennek egészrészét: $Y = \lfloor X \rfloor$.
    (a) Adjuk meg az $Y$ változó eloszlását,
    (b) és várható értékét!
    (c) Igazoljuk (érveléssel vagy számolással), hogy az $\mathbb{E}\big[X - Y \,\big|\, Y = k\big]$ feltételes várható érték nem függ $k$-tól. Mennyi az értéke?

12. A Jó Kenyér pékség kalácsában szeletenként átlag 3, a Príma Pék kalácsában szeletenként átlag 2 mazsola van. Minden másnap bemegyek valamelyik pékségbe, 1/2 valószínűséggel az egyikbe, 1/2-del a másikba, és veszek egy 16 szeletből álló egész kalácsot. Ha minden kalácsból négy szeletet eszek meg (kettőt frissen, kettőt másnap, a többit a családom), átlagosan hány mazsolát kapok én, mekkora szórással?

13. Nagykovácsiból Budapestre dél körül minden óra :24-kor és :54-kor van busz. A megállóba egy $\mathsf{Egyenletes}$[12:00,12:30] eloszlású véletlen időpontban érkezek. Elkezdek stoppolni; az autók egy 1/(10 perc) intenzitású Poisson folyamat szerint vesznek föl.
    (a) Mi a valószínűsége, hogy végül mégis busszal megyek?
    (b) Föltéve, hogy végül a busz jön hamarabb, várhatóan mennyit kell rá várnom?
    (c) Ha hirtelen meggondolom magam, és egyszerűen megvárom a következő buszt, várhatóan hány autót szalasztok el, ami fölvett volna, mekkora szórással?

**IV. Kétdimenziós normális.**

14. Legyenek $X \sim N(0,1)$ és $Y \sim N(0,3)$ független normálisok, ahol a szórásnégyzetek vannak a zárójelben. Legyen $\triangle$ az a szabályos háromszög, melynek alsó oldala az $x$ tengely $[-1,1]$ szakasza, ezzel szemközti csúcsa pedig a $(0,\sqrt{3})$ pont. Mi a valószínűsége, hogy $(X,Y) \in \triangle$?

15. Az $(X,\,Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = (-1,1)$ várhatóérték-vektorral és $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{X \geq -1,\ Y \geq 1\}$ valószínűséget! *(Tipp: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^2$, ahol $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)*

16. Egy konnektorban a feszültség egy 230V várható értékű, 5V szórású normális valváltozónak fogható föl, aminek az értéke napról napra változhat, de egy napon belül azért állandó. Szeretném megmérni, hogy ma mennyi a feszültség, egy lestrapált feszültségmérővel, ami egy 0V várható értékű, 10V szórású normális hibát ad hozzá a valódi értékhez, minden mérésnél a korábbi mérésektől függetlenül. A nagy szóráson úgy próbálok javítani, hogy sok mérést is elvégzek, és ezeket átlagolom.
    (a) Hány mérést kell legalább csinálnom, hogy 90% valószínűséggel a kapott átlagom a valós mai feszültségértéktől legfeljebb 1V-tal térjen el?
    (b) Végül csak egy mérést csináltam, mert utána teljesen bekrepált a feszültségmérőm. Az az egy mérés 245V volt. Ezen információ birtokában mi a mai feszültség feltételes sűrűségfüggvénye? Mekkora a feltételes várható érték és szórás? (Tipp: normális lesz a feltételes eloszlás!)

    Standard normális táblázat a feladatsor végén!

**V. Momentumgeneráló függvény.**

17. Igazold momentumgeneráló-függvények segítségével, hogy két független normális változó összege is normális!

18. (a) Igazold, hogy az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás momentumgeneráló függvénye $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, ahol $t \in (-\infty, \lambda)$.
    (b) Számold ki az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás $k$-adik momentumát, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

19. Nagykovácsi fölött ritkán, de azért szoktak látni Öldöklő illetve Bőséghozó Angyalokat, két, egymástól független Poisson folyamat szerint, 120 évente várható értékben egyet-egyet. Nagykovácsi dédnagyapám igen egészségesen él, most 147 éves, és csak a következő Öldöklő Angyal felbukkanásakor fog meghalni.

    Dédnagyapám példamutató élete fölkeltette az Ördög figyelmét, aki üzletet ajánl a lelkéért: ahány éves korában meghal (ez lehet törtszám is), azt annyiadik hatványra emelik ahány Bőséghozó Angyal elrepült Nagykovácsi fölött életének utolsó éve alatt, és ennyi dukátot kap a dédnagyapám által meghatározott jótékony cél. Ha elfogadja az üzletet, várható értékben mekkora összeggel gazdagszik az a cél? *(Tipp: használd az előző feladatot.)*

$\Phi(z)$

| $z$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |