NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

ELŐADÓ: Pete Gábor GYAKVEZ.:..................................

Valószínűségszámítás Vizsga2, 2015. jan. 5.

Munkaidő: 100 perc. Max pontszám 50. Nemprogramozható kalkulátor használható.

A végén néhány szó a megoldásokról.

Elm. 1. Találd meg a $\mathsf{Binom}(n, p)$ binomiális eloszlás móduszát. **(4p)**

Elm. 2. Legyen X egy λ paraméterű exponenciális változó.

(a) Igazold, hogy X örökifjú tulajdonságú! **(3p)**

(b) Add meg X momentumgeneráló függvényét! (Persze bizonyítással együtt. Figyelj a konvergenciasugárra!) **(3p)**

(c) Igazold, hogy $\mathbb{E}X = \mathbb{D}X = 1/\lambda$. **(3p)**

Elm. 3. Mondd ki és bizonyítsd a Nagy Számok Gyenge Törvényét, föltéve, hogy az összeadandó változónak pozitív és véges a szórása! (A Markov- vagy a Csebisev-egyenlőtlenséget használhatod bizonyítás nélkül.) **(5p)**

Gyak. 1. A MÁV-nál heti átlag 2 vonat késik fél óránál többet. Legyen X a 2014-ben fél óránál többet késő vonatok száma, Y pedig ugyanez a 2014-15-ös tanévben. (Az egyszerűség kedvéért számoljunk úgy, hogy 2014-ben 52 hét volt, a tanévben pedig 39 hét, ebből 13 hét 2014-ben, 26 pedig 2015-ben.)

(a) Hogyan érdemes modellezni a fél óránál nagyobb késések bekövetkezési időpontjait? Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X = 100$? **(3p)**

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X = 100$ és ugyanakkor $Y = 0$? **(4p)**

(c) Mennyi X és Y korrelációs együtthatója? **(4p)**

(d) Föltéve, hogy $X = 100$, mi a feltételes várható értéke Y-nak? **(5p)**

Gyak. 2. Egy jelenleg fél méter magas cseppkő minden eljövendő évszázadban egy független $\mathsf{Egyenletes}[0, 1]$ cm véletlen értékkel lesz magasabb. Hány évszázad kell ahhoz, hogy 3/4 valószínűséggel elérje a barlang 2 méter magas mennyezetét? (Standard normális táblázat a túloldalon!) **(9p)**

Gyak. 3. Legyen $X \sim \mathrm{Egyenletes}[0, 1]$ és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Legyen $Z = Y/X$.

(a) Mennyi $\mathbb{E}Z$? (Nem kell túlságosan meglepődni a válaszon!) **(4p)**

(b) Adjuk meg Z eloszlás- vagy sűrűségfüggvényét. **(5p)**

Néhány szó a megoldásokról

Elm. 1. A $p(i+1)/p(i)$ arányokat kell vizsgálni.

Elm. 2. Hiába mondtam, hogy a konvergenciasugárra ügyeljetek, ez csak egy embernek jutott el a tudatáig a kilencből. Az $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ formula csak $t < \lambda$-ra igaz, míg $M(t) = \infty$ ha $t \geq \lambda$.

Elm. 3. Független azonos eloszlású összeadandókra igaz a tétel, nem elég, hogy azonos a várható értékük!

Gyak. 1. A MÁV-nál heti átlag 2 vonat késik fél óránál többet. Legyen X a 2014-ben fél óránál többet késő vonatok száma, Y pedig ugyanez a 2014-15-ös tanévben. (Az egyszerűség kedvéért számoljunk úgy, hogy 2014-ben 52 hét volt, a tanévben pedig 39 hét, ebből 13 hét 2014-ben, 26 pedig 2015-ben.)

(a) Ez egy 2/hét intenzitású Poisson pontfolyamat. Az X eloszlása $\mathsf{Poi}(104)$.

Lehet éppen CHT-val normális közelítést is használni X-re, de az pontatlanabb lesz.

(b) Legyen $X = \tilde{X} + Z$ és $Y = \tilde{Y} + Z$, ahol Z a 2014 őszén történő nagy késések száma. Ezzel a jelöléssel $\mathbb{P}[X = 100,\ Y = 0] = \mathbb{P}[\tilde{X} = 100,\ Z = 0, \tilde{Y} = 0] = \mathbb{P}[\tilde{X} = 100]\, P[Z = 0]\, \mathbb{P}[\tilde{Y} = 0]$, a függetlenség miatt, ami három Poissonos valószínűség szorzata.

Feltételes valószínűségekről szó sem volt, Bayes-szabály meg totál fölösleges, mert pontosan ugyanolyan típusú kérdés a $\mathbb{P}[X = 100 \,|\, Y = 0]$ mint a $\mathbb{P}[Y = 0 \,|\, X = 100]$.

(c) A lényeg, hogy $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[\tilde{X} + Z, \tilde{Y} + Z] = \mathrm{Cov}[Z, Z] = \mathrm{Var}[Z]$.

(d) Ez kábé egy indikátor várható értékes feladat, mint a jegyzet 7.29-es példájának órán vett egyszerűbb megoldása. $\mathbb{E}[Y \mid X = 100] = \mathbb{E}[\tilde{Y} \mid X = 100] + \mathbb{E}[Z \mid X = 100] = \mathbb{E}[\tilde{Y}] + \frac{\mathbb{E}Z}{\mathbb{E}X} 100$, szimmetria okokból. Ha ez így kicsit túl enigmatikus, gondold át.

Gyak. 2. Könyörgöm, $X_1 + \cdots + X_n$ függetlenek azonos eloszlásúak összege nem ugyanaz, mint nX_1.

Gyak. 3. Legyen $X \sim \mathrm{Egyenletes}[0, 1]$ és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Legyen $Z = Y/X$.

(a) $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[Y]\, \mathbb{E}[1/X] =$ két integrál szorzata, amiből az első tényező véges, a második végtelen.

(b) Eloszlásfgv: $F_Z(z) = \mathbb{P}[Y/X \leq z] = \mathbb{P}[Y \leq zX]$, ami egy egyszerű kétdimenziós integrálja az $f_{X,Y}(x, y)$ közös sűrűségfüggvénynek.

Ennél szerintem bonyolultabb, hogy az $(X, Y) \mapsto (X, Z)$ kétdimenziós változótranszformációval, Jacobival, kiszámoljuk az $f_{X,Z}(x, z)$ közös sűrűségfüggvényt, majd kiintegráljuk belőle az x-et.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000