2. zárthelyi dolgozat Geometriából (2008. április 28.)

1. Adott az e egyenes különböző partjain az A és a B pont, továbbá adott az a távolság. Szerkesszünk az e egyenesen olyan a hosszúságú XY szakaszt, hogy az $AXYB$ töröttvonal hossza minimális legyen. (5p)

2. Vegyük azt az egyenest, amely áthalad az $A(1, 0, 0)$ és a $B(1, 1, 1)$ pontokon, és tekintsük az $y + z = 2$ egyenletű S síkot. Adjuk meg az AB egyenes körüli 180º-os forgatás és az S síkra való tükrözés egymás utáni alkalmazásával nyert transzformáció mátrixát és eltolási részét. Adjuk meg az $x^2/4 + y^2/4 - z^2 = 1$ hiperboloidnak az egyenletét az eredő transzformáció végrehajtása után. (13p)

3. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismert az BC oldalára „kifelé” épített szabályos BCA_1 háromszög A_1 csúcsa, az AC oldalára, mint átfogóra ugyancsak „kifelé” épített egyenlőszárú derékszögű ACB_1 háromszög B_1 csúcsa, valamint az AB oldalára, mint alapra „befelé” épített egyenlőszárú 30º szárszögű ABC_1 háromszög C_1 csúcsai. (7p)

4. Hozzuk kanonikus alakra a $7x^2 + 24xy + 38x + 24y + 175 = 0$ másodrendű görbe egyenletét. (10p)

5. Állítsuk elő annak az egybevágóságnak a lineáris részét és eltolási részét, amely az $[x, z]$ sík $z = x$ egyenese körüli félfordulat és az $[y, z]$ sík $y + z = 1$ egyenese körüli félfordulat (ebben a sorrendben vett) egymás utáni alkalmazásából adódik. Határozzuk meg az (1/2, 1/2, 1/2) középpontú, a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű egységkocka csúcsainak képét a kompozícióként kapott transzformációnál. Írjuk fel egy olyan egyenes egyenletrendszerét, amelyet ez a transzformáció (nem feltétlenül pontonként) önmagára képez. (15p)

2. zárthelyi dolgozat pótlása Geometriából (2008. május 13).

1. Adott két kör, S_1 és S_2. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely párhuzamos egy adott f egyenessel, továbbá az S_1 és S_2 körökből egyenlő húrokat metsz ki. (10p)

2. Az $[x, y]$ koordinátarendszert forgassuk el az origó körül –30°-kal, majd toljuk el a kezdőpontot a (4, –8) pontba. Mi lesz az új koordinátarendszerben az $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ kör egyenlete. (6p)

3. Adott az $O(0, 0, 0)$ pontra illeszkedő és az $x = 1 + 4t,\ y = -2 + 2t,\ z = 2 + 3t$ egyenest tartalmazó α sík, valamint az $x - z = 2$ egyenletű β sík. Határozzuk meg az α és a β síkra vonatkozó tükrözések egymásutánjaként (α majd β) előálló transzformáció mátrixát, és számítsuk ki a $P(7, 3, 10)$ pontnak az eredő transzformációnál keletkező képét. (7p)

4. a. Adjuk meg a $17x^2 + 16xy + 17y^2 - 2x + 52y - 172 = 0$ másodrendű görbe kanonikus alakját. (8p)

b. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelynek két csúcsa az $x^2/25 + y^2/9 = 1$ kúpszelet két fókusza, a harmadik csúcsa pedig a görbe azon pontja, amelyből a fókuszokat összekötő szakasz derékszögben látszik. (7p)

5. Az $ABCD$ konvex négyszög mindegyik oldala (mint alap) fölé kifelé egyenlőszárú derékszögű háromszögeket rajzolunk. Így kapjuk a DPA, AQB, BRC, CSD háromszögeket, amelyekben a derékszögű csúcsok rendre P, Q, R, S. Bizonyítsuk be, hogy a PR és QS egymásra merőlegesek és egyenlő hosszúak. (12p)

2. zárthelyi dolgozat második pótlása Geometriából (2008. május 21.)

1. Hozzuk kanonikus alakra az $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$ egyenletű másodrendű görbét, és adjuk meg a főkörének az egyenletét az eredeti koordinátarendszerre vonatkozóan. Vázlatosan ábrázoljuk is a kúpszeletet az eredeti koordinátarendszerben. (15p)

2. Két adott körhöz egy adott pontból szerkesszünk olyan szelőt, amely a körökből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki. (10p)

3. Szerkesszük meg az ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé az $ACPQ$ és a $CBRS$ négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a PS szakasz kétszer akkora, mint a háromszög C-hez tartozó súlyvonala. Mutassuk meg továbbá, hogy a PB és AS szakaszok merőlegesek egymásra, és hosszuk megegyezik. (10p)

4. Adjuk meg annak a csavarmozgásnak a mátrixát, amelynek tengelye áthalad a P(1/3, 1/3, 0) és Q(2/3, 0, 1/3) pontokon, forgásszöge 120°, és tengelyirányú eltolását a PQ vektor jellemzi (*jobb* csavar legyen). Határozzuk meg a csavarmozgás inverzének mátrixát is. (15p)