BME MATEMATIKA VERSENY
2008. 04. 24.

Az első és második feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük, a többi feladatra bárki adhat be megoldást. Részmegoldásokat, általánosításokat illetve lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladatot kérünk *külön lapra* írni. Minden lapon szerepeljen olvashatóan név, Neptun-kód és a feladat sorszáma, az első lapon pedig ezek mellett kar, szak, évfolyam is.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 10-jegyű szám bármelyik számjegyét letöröljük, akkor az így kapott szám nem lehet az eredeti szám 22-edrésze. Lehet-e a 19-edrésze, és ha igen, milyen helyiértéket kell ehhez letörölni?

2. A G egyszerű gráf csúcsai három osztályra vannak osztva úgy, hogy egy osztályon belül nem fut él. Legyen az osztályok mérete $a \leq b \leq c$. Bizonyítsuk be, hogy ha G-ben nincs háromszög, akkor $|E(G)| \leq ac + bc$.

3. Egy nagy felmérés eredményeként kiderült, hogy egy közösségben családonként átlagosan 2.4 gyerek van, a gyerekeknek viszont átlagosan 1.55 testvérük van. Mennyi a családonkénti gyermekszám szórása?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re létezik $\mathbb{C}^n$-ben két olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ortonormált bázis, melyekre minden $1 \leq i, j, k, l \leq n$ esetén
$$|\langle x_i, y_j \rangle| = |\langle x_k, y_l \rangle|.$$

5. Adott egy 0-1 elemű szimmetrikus mátrix. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható néhány sora, melyek összege megegyezik a főátlóbeli elemekből alkotott vektorral modulo 2.

6. Adott $x > 0$ valós szám, k_n pozitív egészek és $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_n} > 0$ valós számok úgy, hogy $x_{n,1} + x_{n,2} + \ldots, x_{n,k_n} = x$ minden n-re. Bizonyítsuk be, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k_n} (1 + x_{n,i}) = e^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\max_{1\leq i\leq k_n} x_i}{x} = 0.$$

7. Adottak a $t_0, t_1, \ldots, t_k$ különböző valós számok. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét minden $0 \leq j \leq k-1$ esetén:
$$\sum_{l=0}^{k} \frac{t_l^j}{\prod_{0\leq h\leq k, h\neq l}(t_h - t_l)}$$

8. Legyenek $a_1 < \cdots < a_k$ különböző pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyszerű gráf pontosan $a_k + 1$ ponton, melyben az előforduló különböző fokszámok halmaza éppen $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

9. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) e^{-n} = ?$$

10. Adott $n \geq 3$ pont egy egységsugarú kör kerületén úgy, hogy a körvonal bármely P pontjának az adott pontoktól mért távolságainak szorzata legfeljebb 2. Bizonyítsuk be, hogy a pontok egy szabályos n-szög csúcsai.