BME Matematika Verseny **2010. április 29.** 16^{00}–20^{00}, **K121**

— Eredményhirdetés május 6-án, csütörtökön 15^{00} órakor, a Z épület 006-os teremben.
— Az első feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük; a maradék kilenc feladatra bárki adhat be megoldást. Érdemi részmegoldásokat, érdemi általánosításokat és lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk.
— Minden feladat 10 pontot ér.
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör.
— **Csak könnyen olvasható és világos okfejtést értékelünk.**

1. Tekintsük azt a valós elemű, 100×100-as Q mátrixot, amelynek főátlójában (-2)-esek, ezek alatt és fölött közvetlenül 1-esek szerepelnek, és a mátrix többi eleme 0. Adjunk meg olyan pozitív valós, 100-elemű x vektort, amelyre a $Q \cdot x$ vektor minden eleme negatív. Jellemezzük az ilyen tulajdonsággal rendelkező x vektorokat.

2. Legyenek $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \cdots$ pozitív számok, melyekre $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$.

3. Hány olyan gömb van, mely érinti egy általános tetraéder mindegyik lapsíkját?

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\ldots\sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}}} = ?$$

5. Legyen $\hat{\pi} = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^p)^{1/p}}$, ahol $p > 1$ rögzített. A $t = \int_0^S \frac{dx}{(1-x^p)^{1/p}}$ által definiálunk egy $S(t)$ függvényt, $t \in [0, \hat{\pi}/2]$. Bizonyítsuk be, hogy $S" \cdot (S')^{p-2} + S^{p-1} = 0$, $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$, és hogy $S^p + (S')^p = 1$, továbbá $S'(\hat{\pi}/2) = 0$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\pi}/2 = B(1/p, 1-1/p)/p = \frac{\pi/p}{\sin(\pi/p)}$, ahol $B(x,y)$ az Euler-féle béta-függvény.

6. Adott egy G véges csoport egy H valódi részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $g \in G$, melyre tetszőleges $x \in G$ esetén $x^{-1} \cdot g \cdot x \notin H$.

7. Konstruáljunk olyan egyszerű, összefüggő, páros gráfot, amelyben minden pont foka 3, de nincsen benne Hamilton-kör.

8.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = ?$$

9. Mutassuk meg, hogy ha egy 20 csúcsú egyszerű gráfnak 110 éle van, akkor bárhogyan is rajzoljuk le a síkba úgy, hogy semelyik három élnek ne legyen közös belső pontja, legalább 58 élmetszéspont keletkezik.

10. Adott két 1-nél nagyobb egész szám: m és n. Bizonyítsuk be, hogy csak véges sok n-edik hatvány áll elő m^n egymás utáni egész szám n-edik hatványának az összegeként.