Feladatok és megoldások a 11. heti gyakorlathoz
diszkrét várható érték
Építőkari Matematika A3

1. Egy versenyen öt női és öt férfi versenyző indul. Tegyük fel, hogy nincs két azonos eredmény, és mind a 10! sorrend egyformán valószínű. Legyen X a legjobb női versenyző helyezése. (Például ha $X = 1$, akkor nő lett a verseny győztese.) Határozzuk meg X súlyfüggvényét, azaz a $\mathbb{P}\{X = i\}$ valószínűségeket, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

2. Az X valószínűségi változó súlyfüggvénye $p(i) = \frac{i^2}{30}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Határozzuk meg X várható értékét.

3. Albert és Béla a következőt játszák: Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi forintot kap Bélától amennyi a két kockán levő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit kap Alberttől, amennyi a két kockán levő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

4. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

5. Tételezzük fel a 700 Ft, 10 000 Ft, 789 ezer Ft, és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva mekkora az egy lottószelvényen várható nyereségünk?

6. Anna és Béla két kockával játszanak. Anna akkor fizet Bélának, ha mindkét feldobott kockán páratlan szám szerepel. Béla akkor fizet Annának, ha pontosan egy kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

7. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X várható értéke és szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

8. Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja adiákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Vétlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.

   (a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?

   (b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét.

   (c) Számoljuk ki X és Y szórását.

9. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét, és szórását.

10. Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke? (A 8×8-as sakktábla (i, j) négyzetén álló huszár egy lépésben az $(i+1, j+2)$, $(i-1, j+2)$, $(i-2, j+1)$, $(i-2, j-1)$, $(i-1, j-2)$, $(i+1, j-2)$, $(i+2, j-1)$, $(i+2, j+1)$ mezőkre léphet, amennyiben ezek még a sakktáblán találhatóak.)

11. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok nagyobbikának illetve kisebbikének várható értéke?

12. Egy 1-től 10-ig véletlenszerűen kiválasztott számot kell kitalálnunk, igen-nem kérdésekkel. Számítsuk ki, hogy várhatóan hány kérdésre van szükségünk a következő esetekben:

    (a) Az i-edik kérdésünk a következő: "A szám i?", $i = 1, 2, \ldots, 10$.

    (b) Minden egyes kérdéssel megpróbáljuk kizárni a lehetséges számok felét, amennyire ez csak lehetséges. Például az első kérdésünk "A szám nagyobb, mint 5?". Ha igen, a második kérdésünk "A szám nagyobb, mint 7?", stb.

13. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

    (a) $\mathbb{E}[(2+X)^2]$,

    (b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$.

14. Legyen X egy valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$$

    várható értékét és szórását.

15. Hány véletlenszerűen kiválasztott emberre van ahhoz szükség, hogy közülük legalább egynek legalább 1/2 valószínűséggel ugyanaznap legyen a születésnapja, mint nekem?

Eredmények

1. Nyilván nulla a valószínűség, ha $i > 6$.
<u>Sorrend nélkül:</u> Ha a csak a versenyzők nemét nézzük, akkor mind a $\binom{10}{5}$ lehetséges elrendezés egyforma valószínű. Ezek közül meg kell számolnunk, hány elrendezés esetén lesz férfi az első $i-1$ helyen, azután pedig egy nő. Másszóval meg kell számolnunk hányféleképpen rendezhető el 4 nő és $5-(i-1) = 6-i$ férfi az első nő mögötti $10-i$ helyre. A válasz $\binom{10-i}{4}$, és a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{10-i}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{(10-i)! \cdot 5! \cdot 5!}{10! \cdot 4! \cdot (6-i)!} = \frac{(10-i)! \cdot 5 \cdot 5!}{10! \cdot (6-i)!}.$$

<u>Sorrenddel:</u> Ebben az esetben minden versenyzőt különbözőnek tekintünk. Meg kell számonunk, hogy a 10! lehetőségből hány olyan sorrend van, ahol az első $i-1$ helyen férfi van, az i-dik helyen pedig nő. Az első $i-1$ helyre $5!/[5-(i-1)]! = 5!/(6-i)!$ féleképp válogathatunk sorrendben férfiakat (ismétlés nélküli variáció). Ezután jön 5 lehetőség az i-dik hely női versenyzőjének kiválasztására, majd a maradék $10-i$ helyre $(10-i)!$ féleképpen rendezhetjük el a versenyzőket. A keresett valószínűség tehát

$$\frac{5! \cdot 5 \cdot (10-i)!}{(6-i)! \cdot 10!}.$$

A válasz tehát $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ és 6 esetén $1/2,\ 5/18,\ 5/36,\ 5/84,\ 5/252,\ 1/252$.

2.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i^3}{30} = \frac{1^3}{30} + \frac{2^3}{30} + \frac{3^3}{30} + \frac{4^3}{30} = \frac{10}{3}.$$

3. Legyen X a két kockán levő pontok különbségének négyzete. Ekkor X súlyfüggvénye $p(0) = 1/6,\ p(1) = 10/36,\ p(4) = 8/36,\ p(9) = 6/36,\ p(16) = 4/36,\ p(25) = 2/36$, várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{6}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 25 \cdot \frac{2}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}.$$

Hasonlóan, Y a két kockán levő pontok összege, súlyfüggvénye $p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 2/36,\ p(4) = p(10) = 3/36,\ p(5) = p(9) = 4/36,\ p(6) = p(8) = 5/36,\ p(7) = 6/36$, várható értéke $7{=}42/6$. Béla tehát hosszú távon jobban jár.

4. A nyeremény várható értéke

$$\frac{1}{40\,000} \cdot 1\,000\,000\,\text{Ft} + \frac{10}{40\,000} \cdot 50\,000\,\text{Ft} + \frac{100}{40\,000} \cdot 5\,000\,\text{Ft} = 50\,\text{Ft},$$

a jegyet tehát 100 Ft-ért kell árulni.

5. A várható nyeremény

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot 700 + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot 10\,000 + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \cdot 789\,000 + \frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot 535\,000\,000 \simeq 43.\underline{66}\,\text{Ft}.$$

Ha a jegyár 150 Ft, akkor várhatóan $106.\underline{34}$ Ft-ot vesztünk szelvényenként.

6 Anna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ eséllyel fizet Bélának, Béla pedig $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/2$ eséllyel fizet Annának. A játék méltányos, ha Anna kétszer annyit fizet, mint Béla, pl. 2 petákot, míg Béla 1 petákot.

7 n oldalú "kocka" esetén X súlyfüggvénye $p(i) = 1/n$, $i = 1,\ 2, \ldots n$. A számtani sor összegképletével

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

A szóráshoz a második momentum is kell, ehhez felhasználjuk a négyzetszámok összegére vonatkozó képletet:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot p(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}.$$

A szórás ezek segítségével

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}.$$

Kocka eseén $n = 6$, $\mathbb{E}(X) = 7/2$, $\mathbb{D}(X) = \sqrt{35/12}$.

8.(a) Nagyobb eséllyel választunk egy diákot egy tömöttebb buszról, míg a sofőr választásakor minden busz egyenlő valószínű. Ezért X várhatóan nagyobb lesz Y-nál.

(b) X súlyfüggvényét felhasználva

$$\mathbb{E}(X) = 40 \cdot \frac{40}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 25 \cdot \frac{25}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \simeq 39.28.$$

Y egyenlő eséllyel veszi föl bármelyik megadott létszám értékét,

$$\mathbb{E}(Y) = 40 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 37.$$

(c) A szóráshoz meghatározzuk a második momentumokat:

$$\mathbb{E}(X^2) = 40^2 \cdot \frac{40}{148} + 33^2 \cdot \frac{33}{148} + 25^2 \cdot \frac{25}{148} + 50^2 \cdot \frac{50}{148} \simeq 1625.4,$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 40^2 \cdot \frac{1}{4} + 33^2 \cdot \frac{1}{4} + 25^2 \cdot \frac{1}{4} + 50^2 \cdot \frac{1}{4} = 1453.5.$$

A szórások

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)^2]} \simeq \sqrt{1625.4 - 39.28^2} \simeq 9.06,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)^2]} \simeq \sqrt{1453.5 - 37^2} \simeq 9.19.$$

9. X súlyfüggvénye:

$$p(0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}, \quad p(3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}.$$

Ezek alapján

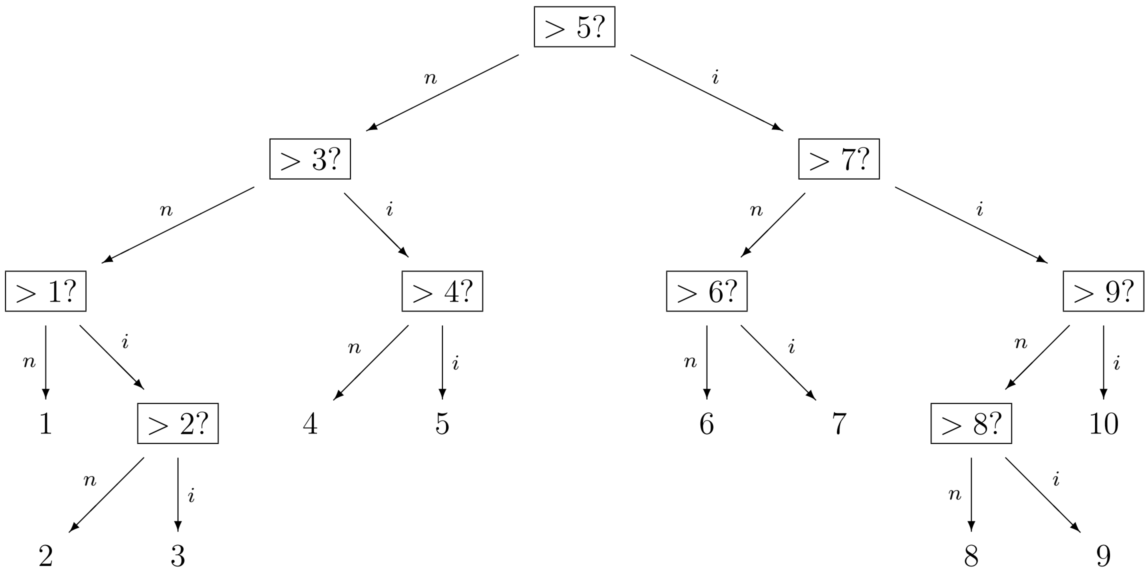
$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5},$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} = 2,$$

$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{2 - [6/5]^2} = \sqrt{14}/5.$

12.(a) Legyen X a véletlen szám. A módszerünk szerint annyi kérdésre van szükség amennyi az X értéke. Ezért a válasz $\mathbb{E}(X) = 5.5$.

(b) Legyen a stratégiánk a következő:



Az első kérdésünk az, hogy a szám nagyobb-e, mint 5. Ennél, és a további kérdéseknél mindig próbáljuk megfelezni a lehetőségeket. Három kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $1, 4, 5, 6, 7$, vagy 10 (azaz $6/10$ valószínűséggel), négy kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $2, 3, 8$, vagy 9 ($4/10$ valószínűséggel). A kérdések várható száma ezért $3 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{17}{5} = 3.4$. 1 től 10-ig terjedő véletlen számnál a két módszer várható időtartama nem különbözik számottevően, azonban nagy véletlen számoknál a (b) módszer lényegesen gyorsabban működik.

13.(a) $\mathbb{E}[(2+X)^2] = \mathbb{E}(4)+\mathbb{E}(4X)+\mathbb{E}(X^2) = 4+4\mathbb{E}(X)+\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2 = 4+4\cdot 1+5+1^2 = 14.$

(b) A szórásnégyzet esetén az additív konstans nem számít, a multipliktaív konstans pedig négyzetesen jön ki a szórásnégyzet alól. Ezért $\mathbb{D}^2(4 + 3X) = 3^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) = 9 \cdot 5 = 45$.

14.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0,$$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2\Big(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{D}^2(X) = 1,$$

ezért $\mathbb{D}(Y) = 1$. Y-t az X változó *standardizáltjának* hívjuk.

15. Annak valószínűsége, hogy n ember közül eggyel sem közös a szülinapom $\left(\frac{364}{365}\right)^n$ (szökőéveket nem számolva). Annak valószínűsége, hogy legalább eggyel közös a szülinapom, $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. Ezért keresem azt az n-et, melyre

$$\begin{aligned} 1 - \Big(\frac{364}{365}\Big)^n &\geq \frac{1}{2} \\ \Big(\frac{364}{365}\Big)^n &\leq \frac{1}{2} \\ n \cdot \log_2\Big(\frac{364}{365}\Big) &\leq -1 \\ n &\geq \frac{1}{\log_2(365) - \log_2(364)} \simeq 252.7, \end{aligned}$$

azaz legalább 253 ember szükséges.