Feladatok az 5. hétre. Eredményekkel és kidolgozott megoldásokkal

1. Oldjuk meg az alábbi másodrendű lineáris homogén d.e. - et, tudva, hogy egy megoldása az $y = x$!
$$2x^2y'' - xy' + y = 0.$$

2. Oldjuk meg a következő kezdetiérték-feladatot:
$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$$

3. Ha egy rudat az x abszcisszájú keresztmetszetében adott $f(x)$ függvénnyel arányos hajlítónyomaték terhel, akkor a rúd súlyvonalának alakja a terhelés után az alábbi differenciálegyenletből számítható:
$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = f(x).$$
Határozzuk meg a rúd alakját, ha a nyomaték eloszlás
$$f(x) = 1 - x,$$
és a kezdeti feltételek
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

4. Határozzuk meg az általános megoldását a következő másodrendű differenciálegyenleteknek (a megoldásokat elég implicit alakban megadni):
   (a)
   $$(y')^2 + 2yy'' = 0,$$
   (b)
   $$y'' = \frac{1}{4\cdot\sqrt{y}},$$
   (c)
   $$yy'' + (y')^2 = 1.$$

5. Oldjuk meg az $y'' = 2y'y, y(0) = 0, y'(0) = 1$ k.é.p. - t!

6. Oldjuk meg az $y'' = -2t(y')^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ k.é.p. - t!

7. Oldjuk meg a következő másodrendű differenciálegyenletet: $xy'' - y' = x^3$.

8. Tekintsük a következő differenciálegyenletet:
$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0.$$
Először ellenőrizzük le, hogy az
$$Y_1 = t, \qquad Y_2 = te^t$$
függvények a megfelelő $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ homogén egyenlet fundamentális megoldását adják. Ezek után határozzuk meg az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldását!

Megjegyzés: Y_1-re rájönni egyszerű, viszont Y_2 megkeresésére javasoljuk a **konstans variációs módszert**:

$Y_2(t) = C(t)\cdot Y_1(t)$ alakban keresve a homogén egyenlet megoldását, szintén kijön te^t. Próbálják ki!

9. Oldjuk meg: $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1$, tudván, hogy $y_1 = t^2,\ y_2 = \frac{1}{t}$ megoldások!

Eredmények

1. Az egyenlet egy megoldása: $y_1 = x$. Egy másik megoldást keressünk $y_2 = ux$ alakban:

$$2x^2(ux)'' - x(ux)' + ux = 0,$$

innen a műveletek elvégzése, rendezés és x^2 - tel való osztás után (innentől feltesszük, hogy $x > 0$):

$$2u''x + 3u' = 0.$$

Ennek az u' - re nézve elsőfokú, szétválasztható változójú d.e. - nek a megoldása:

$$u' = cx^{-3/2},$$

Nekünk egy megoldás elég (miért?), ezért legyen $u' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, ahonnan $u = x^{-1/2} + c$ és c - t 0 - nak választva kapjuk, hogy

$$u = x^{-1/2},$$

végül: $y_2 = xx^{-1/2} = \sqrt{x},\ x > 0$. Tehát az eredeti d.e. összes megoldása: $y = c_1x + c_2\sqrt{x}$.

2. A differenciálegyenlet mindkét oldalát kétszer x szerint integráljuk:

$$y' = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C_1,$$

$$y = \int (\arcsin x + C_1)dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1x + C_2.$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3 = y(0) &= 1 + C_2 \\ 1 = y'(0) &= \arcsin 0 + C_1, \end{aligned}$$

vagyis

$$C_1 = 1 \text{ és } C_2 = 2.$$

Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x + 2.$$

3. A másodrendű egyenletünkből hiányzik az y. Tehát amint előadáson tanultuk, ekkor a $p = p(x)$ új változót behozzuk az y' helyére. Vagyis

$$p(x) = y'(x) \text{ és } p'(x) = y''(x).$$

Az új változóval az egyenletünk alakja átrendezés után:

$$\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \int f(x)dx.$$

Bevezetve az

$$\int f(x)dx = F(x)$$

jelölést, az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = F(x) + c_1.$$

Innen p-t kifejezve:

$$p(x) = \frac{F(x)+c_1}{\sqrt{1-(F(x)+c_1)^2}}.$$

Használva, hogy $y' = p$ kapjuk, hogy

$$y = \int \frac{F(x)+c_1}{\sqrt{1-(F(x)+c_1)^2}}dx. \tag{1}$$

Abban a speciális esetben, amikor $f(x) = 1 - x$ integrálással kapjuk, hogy

$$F(x) + c_1 = x(1-\frac{x}{2}) + c_1.$$

Ekkor tehát

$$y' = p = \frac{x(1-\frac{x}{2})+c_1}{\sqrt{1-\left(x(1-\frac{x}{2})+c_1\right)^2}}.$$

Használva az $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt, és azt, hogy egy tört pontosan akkor egyenlő nullával amikor a számlálója nulla, adódik, hogy

$$c_1 = 0.$$

Ezt helyettesítve (1)-ba, és kihasználva, hogy $y(0) = 0$:

$$y(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{t(1-\frac{t}{2})}{\sqrt{1-t^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}}dt.$$

Ez azonban egy ún. *elliptikus integrál*, amit nem lehet elemi függvényekkel kifejezni.

4. A hiányos másodrendű d.e.-k megoldásához az $y'(x) = p(y)$, $y''(x) = p'(y)p(y)$ helyettesítést alkalmazzuk:

   (a) $(y')^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow p^2(y) + 2yp(y)p'(y) = 0 \Rightarrow p(y)(p(y) + 2yp'(y)) = 0$
   Ha $p(y) \equiv 0$, akkor $y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C$ jó megoldás lesz. Ellenkező esetben elég a zárójelben lévő $p(y) + 2yp'(y) = 0$ kifejezést vizsgálni, ami egy szétválasztható d.e., a megoldása $p(y) = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$. Azaz

$$y'(x) = \frac{C_1}{\sqrt{y(x)}} \quad \Rightarrow \quad \int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx$$
$$\frac{2}{3}y^{3/2} = C_1x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = (C_1x + C_2)^{2/3}.$$

   Megjegyzés: más konstansokkal $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$ is jó.

(b)

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}} \quad &\Rightarrow \quad p(y)p'(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} \\
\int p(y)dp(y) = \int \frac{1}{4\sqrt{y}}dy \quad &\Rightarrow \quad \frac{p(y)^2}{2} + C_1' = \frac{\sqrt{y}}{2} + C_2' \\
(y')^2 = \sqrt{y} + C_1 \quad &\Rightarrow \quad y' = \sqrt{\sqrt{y} + C_1} \\
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}dy \quad &= \quad \int 1dx = x + C_2'
\end{aligned}$$

Az integrálban helyettesítést hajtunk végre: $u = \sqrt{y}$, továbbá $dy = 2udu$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}dy \quad &= \quad \int \frac{2u}{\sqrt{u + C_1}}dy = \\
= \int \frac{2(u + C_1)}{\sqrt{u + C_1}} - \frac{2C_1}{\sqrt{u + C_1}}dy \quad &= \quad \int 2\sqrt{u + C_1}dy - 2C_1 \int \frac{1}{\sqrt{u + C_1}}dy = \\
= \frac{4}{3}\sqrt{u + C_1}^3 - 4C_1\sqrt{u + C_1} \quad &= \quad x + C_2'
\end{aligned}$$

Innen y-t visszahelyettesítve:

$$3x = 4\sqrt{\sqrt{y} + C_1}^3 - 12C_1\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$$

(c)

$$yy'' + (y')^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad yp'p + p^2 = 1$$

Így egy Bernoulli-típusú d.e.-t kapunk, $z(y) = p(y)^2$ helyettesítéssel:

$$z'(y) = 2p(y)p'(y) = \frac{2}{y}(1 - z(y)) \quad \Rightarrow \quad yz'(y) + 2z(y) = 2$$

Ez pedig egy elsőrendű lineáris d.e., a homogén egyenlet: $yz'(y) + 2z(y) = 0$, a megoldása $z_h(y) = C_1/y^2$, az inhomogén egyenlet megoldása $z_{ih}(y) = 1$, így a megoldás

$$z(y) = z_h(y) + z_{ih}(y) = \frac{C_1}{y^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad p(y)^2 = \frac{C_1}{y^2} + 1$$

Visszahelyettesítve $y'(x) = p(y)$-et:

$$\begin{aligned}
(y')^2 = \frac{C_1}{y^2} + 1 \quad &\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y^2} + 1} \\
\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1}{y^2} + 1}} \quad &= \quad \pm\int 1dx = \pm x + C_2
\end{aligned}$$

Az integrál kiszámításához alakítsuk át a jobboldalt:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1}{y^2} + 1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1 + y^2}{y^2}}} = \int \frac{y}{\sqrt{C_1 + y^2}}dy = \sqrt{C_1 + y^2}$$

Tehát a megoldás:

$$\sqrt{C_1 + y^2} = \pm x + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = (\pm x + C_2)^2 - C_1.$$

Vagy más konstansokkal fölírva:

$$y^2 - (x + C_2)^2 = C_1 \text{ ill. } y^2 - (-x + C_2)^2 = C_1.$$

5. Ha $p(y) = y'$, akkor a d.e: $pp' = 2py$. A $p = 0$ ennek megoldása, ami azt jelenti, hogy $y \equiv c$. Ha $p \neq 0$, akkor $p' = 2y$, tehát $p = y^2 + c$. Tehát $y' = y^2 + c, y(0) = 0, y'(0) = 1$. Innen $c = 1$, meg kell tehát oldanunk az $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$ k.é.p. - t. Ennek implicit megoldása: $\arctan y = t$, tehát a megoldás: $y = \tan t,\ t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Legyen $v = y'$, ekkor a k.é.p. $v' = -2tv^2, v(0) = -1$ alakú. Ennek megoldása: $-\frac{1}{v} = -t^2+c$, figyelembe véve $v(0) = -1$ - et $c = 1$, s így tehát $v(t) = \frac{1}{t^2-1}$. Innen $y = \int \frac{1}{t^2-1}\, dt = \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|1+t|\right) + c = \frac{1}{2}\left(\ln(1-t) - \ln(1+t)\right) + c$ (az abszolút érték jelét a logaritmuson belül elhagyhattuk, mert most $-1 < t < 1$ a kezdeti feltétel miatt). Az $y(0) = 0$ feltétel miatt $0 = c$. Így tehát $y(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} = -\operatorname{artanh} t,\ t \in (-1, 1)$.

7. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$.

8. Először is a $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ homogén egyenlet megoldásait adjuk meg. Tudjuk, hogy $Y_1(t) = t$ megoldja az egyenletet, azaz:

$$t^2Y_1''(t) - t(t+2)Y_1'(t) + (t+2)Y_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -t(t+2) + (t+2)t = 0 \tag{2}$$

A tőle lineárisan független megoldást $Y_2(t) = C(t)Y_1(t) = C(t)t$ alakban keressük (*konstans variációs módszer*). Innen $Y_2(t)$ deriváltjai (általános esetben):

$$\begin{aligned} Y_2'(t) &= C'(t)Y_1(t) + C(t)Y_1'(t), \\ Y_2''(t) &= C''(t)Y_1(t) + 2C'(t)Y_1'(t) + C(t)Y_1''(t). \end{aligned}$$

Jelen esetben $Y_1(t) = t$, így

$$\begin{aligned} Y_2'(t) &= C'(t)t + C(t), \\ Y_2''(t) &= C''(t)t + 2C'(t). \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve a homogén egyenletbe a következőt kapjuk:

$$t^2(C''(t)t + 2C'(t)) - t(t+2)(C'(t)t + C(t)) + (t+2)(C(t)t) = 0 \tag{3}$$

(2) mindkét oldalát $C(t)$-vel szorozva, és kivonva (3)-ból, a következő alakot kapjuk:

$$t^2(C''(t)t + 2C'(t)) - t(t+2)(C'(t)t) = 0$$

$t \neq 0$ esetén:

$$C''(t)t + 2C'(t) - (t+2)C'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad tC''(t) - tC'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C''(t) - C'(t) = 0.$$

Ez egy hiányos másodrendű d.e., a tanult módszereket alkalmazva $C(t) = e^t$ adódik, azaz a homogén egyenlet másik fundamentális megoldása $Y_2(t) = te^t$, s így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(t) = C_1 t + C_2 te^t.$$

Másodszor az inhomogén egyenlet megoldását adjuk meg. A partikuláris megoldás megkeresésére a képletgyűjtemény 4. pontjában található **két konstans variációs módszer**t használtuk, mellyel a $-2t^2 - 2t$ partikuláris megoldást kapjuk. Ennek második tagja $(-2t)$ beolvad az általános megoldás C_1t részébe. (Persze sokféle jó partikuláris megoldás írható ide.) Az inhomogén általános megoldás tehát:

$$y(t) = C_1 t + C_2 te^t - 2t^2.$$

9. Hozzuk standard alakra:

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 3 - \frac{1}{t^2}$$

és keressük a partikuláris megoldást $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$ alakban. Ekkor

$$\begin{array}{rcrcl} c_1' t^2 & + & c_2' \frac{1}{t} & = & 0 \\ c_1' 2t & - & c_2' \frac{1}{t^2} & = & 3 - \frac{1}{t^2}. \end{array}$$

Innen $c_1 = \ln t + \frac{1}{6t^2}$, $c_2 = \frac{t - t^3}{3}$, azaz, $y_p = t^2 \ln t + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{3}$. Mivel t^2 megoldása a homogénnak, ezért $y_p = t^2 \ln t + \frac{1}{2}$ is jó lesz. Tehát az általános megoldás: $y_{i,\text{ált}} = t^2 \ln t + \frac{1}{2} + c_1 t^2 + c_2 \frac{1}{t}$.