Feladatok és megoldások a 9. heti gyakorlathoz
függetlenség
Építőkari Matematika A3

1. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában, a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) mindkét gép dolgozik,
   (b) legalább az egyik gép dolgozik,
   (c) csak az egyik gép dolgozik,
   (d) mindkét gép áll?

2. Tegyük fel, hogy egy családban minden gyermek 50% eséllyel lesz fiú vagy lány, függetlenül a többi gyermektől. Egy 5 gyermekes családban számoljuk ki a következő valószínűségeket:
   (a) Minden gyermek egyforma nemű.
   (b) A három idősebb gyermek fiú, a két fiatalabb gyermek lány.
   (c) Pontosan három fiú van a családban.
   (d) A két legidősebb gyermek lány.
   (e) Legalább egy lány van.

3. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ {a dobott számok összege 7}, $B =$ {legalább az egyik kockán van hatos}, $C =$ {mindkét kockával páratlant dobok}, $D =$ {a két kockával különböző számokat dobok}, $E =$ {a zöld kockával 4-est dobok}.
   (a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
   (b) Kizáróak-e az A és C események?
   (c) Mennyi a B esemény valószínűsége?
   (d) Hogyan viszonyul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És függetlenségükre nézve?
   (e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
   (f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
      i. függetlenek, de nem kizáróak,
      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ {a dobott számok összege 7}, $B =$ {a piros kockával 3-ast dobok}, $C =$ {a zöld kockával 4-est dobok}.
   (a) Függetlenek-e az A és B események? Az A és C események? Hát a B és C események?
   (b) Függetlenek-e az A, B, C események?
   (c) Függetlenek-e az A és a $B \cap C$ események?
   (d) Tehát: függetlenek-e az A, B, C események?

5*. Egy szabályos érmedobás kimenetelét szeretnénk szimulálni, de sajnos csak egy meglehetősen gyanús kinézetű cinkelt érme áll rendelkezésünkre. Az érme feldobáskor p valószínűséggel mutat fejet, és bár p értékét nem ismerjük, minden okunk megvan feltételezni, hogy $p \neq 1/2$. Hogy mégis szabályos érmedobást szimuláljunk, a következő algoritmus szerint járunk el:

(1) Feldobjuk az érmét.

(2) Megint feldobjuk az érmét.

(3) Ha mindkét dobás fej, illetve ha mindkét dobás írás, akkor visszatérünk az (1) lépéshez.

(4) Ha a két dobás különböző, akkor a másodikat tekintjük az algoritmusunk kimenetelének.

(a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyenlő valószínűséggel fog fej és írás eredményt adni.

(b) Lehetne-e egyszerűsíteni az algoritmust a következőképpen: egymás után addig dobáljuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást adjuk meg kimenetelként?

6. Egy cinkelt érme p valószínűséggel mutat fejet feldobáskor. Az érmét egymás után sokszor feldobjuk. Mi a valószínűsége, hogy az első négy dobás eredménye

   (a) F, F, F, F,

   (b) $Í$, F, F, F?

   (c*) Mi a valószínűsége, hogy az ($Í$, F, F, F) sorozatot előbb fogjuk látni, mint a (F, F, F, F) sorozatot? (Tipp: Hogyan történhet meg az, hogy az (F, F, F, F) sorozatot látjuk előbb?)

7. Egy vetélkedőn egy házaspár alkot egy csapatot. Amikor a műsorvezetőtől egy eldöntendő kérdést kapnak, a férj és a feleség is egymástól függetlenül p valószínűséggel mondaná a helyes választ. Az alábbiak közül melyik a jobb stratégia?

   (a) Egyiküket kijelölik, aki a másikra nem hallgatva válaszol a kérdésre, vagy

   (b) mindketten gondolkodnak a kérdésen, és ha egyetértenek válaszolnak, ha pedig különböző a véleményük akkor feldobnak egy szabályos pénzt, hogy eldöntsék melyikük véleményét fogják válaszolni?

8. Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: $A - B$, $A - C$, $B - C$. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül p valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

9. Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: $A - B$, $A - B$ egy másik nyomvonalon is, $B - C$. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül q valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

Eredmények

1.(a) $0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

(b) $1 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.88$

(c) $0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$

(d) $0.4 \cdot 0.3 = 0.12$

2.(a) $(1/2)^5 + (1/2)^5 = 1/16$

(b) $1/32$

(c) $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5/16$

(d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$

(e) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 31/32$

3.(a) Nem, mert

(b) kizáró események.

(c) $1 - \mathbb{P}\{\text{egyik sem hatos}\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$

(d) A-ból következik D, avagy $A \subset D$. Ezért $\mathbb{P}\{A\} \leq \mathbb{P}\{D\}$, és pl. $5/6 = \mathbb{P}\{D\} \neq \mathbb{P}\{D \mid A\} = 1$ mutatja, hogy A és D nem lehetnek függetlenek.

(e) Az A esemény a 36 lehetséges kimenetelből hat esetben valósul meg, ezért valószínűsége 1/6. Az E esemény valószínűsége is 1/6, $A \cap E$ pedig pontosan egy esetben valósul meg, valószínűsége 1/36. Így $\mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{A \cap E\}$, a két esemény független.

(f)
  i. A és E;
  ii. A és C.

4.(a) $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{C\} = 1/6$, és $\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{AC\} = \mathbb{P}\{BC\} = 1/36$, ezért A és B; A és C; B és C páronként függetlenek.

(c) Mivel $B \cap C \subset A$, $B \cap C$ és A nem lehetnek függetlenek.

(b),(d) A, B, C nem függetlenek. Erre utal a (c) eredmény, illetve az, hogy $1/36 = \mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} \neq \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\} \cdot \mathbb{P}\{C\} = 1/216$.

4*.(a) Az algoritmus átfogalmazható a következőképp: kétszer feldobjuk az érmét. Ha egyezik a két eredmény, akkor a két dobásunk nem számít, újra kezdjük a kísérletet. Ha különböző a két eredmény, akkor tekintjük a második kimenetelt. Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy az algoritmusunk kimenetelei egy feltételes eloszlást követnek:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{az algoritmus } F\text{-et ad}\} &= \mathbb{P}\{(\acute{I},\, F) \mid (\acute{I},\, F) \text{ vagy } (F,\, \acute{I})\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{(\acute{I},\, F)\}}{\mathbb{P}\{(\acute{I},\, F) \text{ vagy } (F,\, \acute{I})\}} = \frac{(1-p)p}{(1-p)p + p(1-p)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan, az algoritmus 1/2 valószínűséggel ad írást is.

(b) Bármilyen $0 < p < 1$ esetén előbb-utóbb biztosan lesz fej és írás is a dobások között. A (b) algoritmus ezért F-et ad akkor és csak akkor, ha az első dobás $Í$, ennek valószínűsége $1-p$. Az algoritmus $Í$-t ad akkor és csak akkor, ha az első dobás F, ennek valószínűsége p. Így a (b) algoritmus nem ad szabályos pénzérmedobás-eredményeket.

A feladatban a nehézséget annak megfogalmazása jelenti, hogy miért nem igaz az (a)-ban adott érvelésünk a (b) algoritmus esetén. Az (a) algoritmus fenti átfogalmazásában *teljesen rögzített* két érmedobást (az első kettőt) tekintünk, míg a (b) algoritmusban *véletlen sorszámú* két dobásról van szó, arról a kettőről, melyekben először látunk változást a fej-írás sorozatban. Ez az ártalmatlannak tűnő különbség lényegesen eltorzítja a $(F,\, Í)$ illetve az $(Í,\, F)$ kimenetelek valószínűségét, így (a)-beli érvelésünk a (b) esetben így nézne ki:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{az algoritmus } F\text{-et ad}\} &= \mathbb{P}\{(Í,\, F) \,|\, (Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{(Í,\, F)\}}{\mathbb{P}\{(Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\}} = \frac{(1-p)}{(1-p)+p} = 1-p,\end{aligned}$$

és hasonlóan az algoritmus $Í$ kimenetelének valószínűsége p.

6(a) p^4

(b) $(1-p)\cdot p^3$

(c*) Az első megállapításunk, hogy $0 < p < 1$ esetén előbb-utóbb biztosan latni fogjuk az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozatot. Tegyük fel, hogy az első ilyen sorozat az n-edik dobással kezdődik. Ha $n > 1$, akkor az $n-1$-edik dobás nem lehet F, mert akkor az első $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat már az n-edik dobás előtt elkezdődött volna. Ezért ilyenkor az $n-1$-dik dobás mindenképpen $Í$, és így az $n-1$-edik dobással kezdődően az $(Í,\, F,\, F,\, F,\, F)$ sorozatot látjuk. Ebben pedig az $(Í,\, F,\, F,\, F)$ sorozat előbb jelenik meg, mint az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat. Azaz az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat csak akkor jöhet az $(Í,\, F,\, F,\, F)$ sorozat előtt, ha mindjárt az $n = 1$ helyen elkezdődik, vagyis ha az első négy dobás mindegyike fej. Ennek esélye p^4.

7. Az (a) esetben a helyes választ p valószínűséggel adja a csapat. A (b) esetben legyen E az az esemény, hogy a csapat a helyes eredményt adja, J illetve R, hogy a feleség vagy a férj a jó illetve rossz választ adná (azaz pl. $(J,\, J)$ az az esemény, hogy mindketten a helyes választ tudnák). Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E\} &= \mathbb{P}\{E \,|\, (J,\, J)\}\cdot\mathbb{P}\{(J,\, J)\} + \mathbb{P}\{E \,|\, (J,\, R)\}\cdot\mathbb{P}\{(J,\, R)\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{E \,|\, (R,\, J)\}\cdot\mathbb{P}\{(R,\, J)\} + \mathbb{P}\{E \,|\, (R,\, R)\}\cdot\mathbb{P}\{(R,\, R)\} \\ &= 1\cdot p^2 + \frac{1}{2}\cdot p(1-p) + \frac{1}{2}\cdot(1-p)p + 0\cdot(1-p)^2 = p.\end{aligned}$$

A két stratégia között tehát nincs különbség. A (b)-hez hasonló stratégiák nagyobb csapatok (és $p > 1/2$) esetén segítenek.

8. Jelöljük a keresett eseményt $A \leftrightsquigarrow C$-vel, és az A és B közötti út átjárhatóságát $A \leftrightarrow B$-vel. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\} &= \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C \,|\, A \leftrightarrow C\}\cdot(1-p) + \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C \,|\, A \not\leftrightarrow C\}\cdot p \\ &= 1\cdot(1-p) + \mathbb{P}\{A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C\}\cdot p = 1-p+(1-p)^2\cdot p.\end{aligned}$$

9. Az előző feladat jelöléseivel az $A \leftrightsquigarrow B$ és $B \leftrightsquigarrow C$ események függetlenek. Ezért

$$\mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\} = \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow B\}\cdot\mathbb{P}\{B \leftrightsquigarrow C\} = [1-q^2]\cdot(1-q).$$

Feladatok és megoldások a 9. hétre
Építőkari Matematika A3

1. Egy szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, ha tudjuk, hogy:
   - párosat dobunk?
   - legalább 3-ast dobunk?
   - legfeljebb 5-öst dobunk?

2. Feldobunk két kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

3. Két kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy lesz a dobások között 6-os, feltéve, hogy a két kocka különböző számot mutat?

4. Két kockával dobunk újra és újra egészen addig, amíg legalább az egyik 6-ost mutat. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik is hatost mutat? (Ha úgy gondoljuk a válasz 1/6, akkor támadjuk meg újra a problémát.)

5. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges
Fiú	50	60
Lány	40	80
Tanár	10	20

   (a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy:
      i. fiúé?
      ii. betegé?
      iii. beteg fiúé?

   (b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

   (c) Az orvos szorgos asszisztense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes beteg kartonját. Ezek közül véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

   (d) Ha kettőt húzok ugyanebből a kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

6. (a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

   (b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

7. Két golyót egymástól függetlenül 1/2 – 1/2 valószínűséggel aranyszínűre vagy feketére festettek, majd egy urnába helyeztek.

   (a) Tegyük fel, hogy az aranyszínű festéket nyitva találjuk, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ezen információ birtokában mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

   (b) Most ehelyett tegyük fel azt, hogy az urna megbillent, és a két golyó közül az egyik kigurult belőle. Ha ez a golyó aranyszínű, mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

8. A kerületben a családok 36%-ának van kutyája, és 30%-ának van macskája. Azon családok közül, akiknek kutyájuk van, 22%-nak macskája is van.
   (a) A családok hány százalékának van kutyája és macskája is?
   (b) Azon családok közül, akiknek macskájuk van, hány százaléknak van kutyája is?
9. Egy urnában 3 piros, 5 fehér, és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha
   (a) visszatesszük,
   (b) nem tesszük vissza?
10. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így másodszorra már csak 40%-uk, harmadszorra pedig csak 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
   (a) átvészeli a teljes eljárást?
   (b) az utolsó irtáskor pusztul el?
   (c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?
11. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy 1/2 valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B-nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) az első üzletkötés kedvező lesz?
   (b) mindkét üzletkötés javunkra válik?
   (c) lesz köztük rossz és jó üzlet is?
12. Egy pakli kártyát (azaz 52 lapot, melyek között összesen 4 ász van) véletlenszerűen négy játékosnak osztunk, mindenki 13 lapot kap. Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jutott ász? Legyen E_i az az esemény, hogy az i-dik játékos pontosan egy ászt kapott. Határozzuk meg $\mathbb{P}\{E_1E_2E_3E_4\}$-et a szorzási szabály segítségével.
13. Egy diák három záróvizsgájára készül. Az első júniusban lesz, és ezen 0.9 eséllyel megy át. Ha ezen átment, akkor júliusban próbálhatja meg a második vizsgát, amely 0.8 eséllyel lesz sikeres. Ha ezen is átment, akkor szeptemberben megy a harmadik vizsgára, ahol 0.7 eséllyel megy át. Ellenben ha bármelyik vizsgája sikertelen, akkor csak egy év múlva lehet újra próbálkozni.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy az első évben átmegy mindhárom vizsgán?
   (b) Feltéve, hogy nem sikerült az első évben letenni a vizsgákat, mi a valószínűsége, hogy a második vizsgája volt sikertelen?
14. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?
15. Az autósok 0.1%-a áthajt a vasúti átjáró tilos jelzésén. Az átjáró a domb alján futó kisforgalmú úton átlagosan az idő 5%-ában mutat tilos jelzést. A dombról látom, hogy épp egy autó megy át az átjárón. Mi a valószínűsége, hogy ekkor szabad az átjáró?

16. A ketyere gyárban az A, B, és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C gépsoron gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

17. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden harmadik alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetének köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak gőze sincs, melyik út merre vezet, így kockadobással egyenlő esélyt ad mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert mennyi kétszer kettő, mire közlik vele, hogy négy. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénbe jutott?

18. Egy gépjármű-biztosítótársaság az ügyfeleit három osztályba sorolja: jó vezető, átlagos vezető, rossz vezető. A társaság tapasztalata alapján a jó, átlagos és rossz vezetők 0.05, 0.15, illetve 0.3 eséllyel lesznek baleset részesei egy év alatt. Hogyha az ügyfelek 20%-a jó vezető, 50%-a átlagos vezető, és 30%-a rossz vezető, hány százalékuk lesz baleset részese a jövő év folyamán? Hogyha egy adott ügyfélnek nem volt tavaly balesete, milyen valószínűséggel jó, átlagos illetve rossz vezető?

19. Egy bináris csatornán a 0 jelet 1/3, az 1 jelet 2/3 valószínűséggel adják le. Hálózati zavarok miatt ha 0-t adnak le, akkor 1/4 valószínűséggel 1 érkzik, ha 1-et adnak le, akkor 1/5 valószínűséggel 0 érkezik.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy 0-át kapunk?

    (b) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

20. Egy közlekedési társaság szeretné felmérni a buszain az átlagos utasszámot. Erre két módszer kínálkozik:

    (a) A társaság megbíz n véletlenszerűen kiválasztott utast, hogy számolják meg hányan vannak összesen azokon a buszon, amelyeken éppen utaznak. Ezek után a cég kiszámolja az így kapott n válasz átlagát.

    (b) A társaság megkéri n buszsofőrjét, hogy számolja meg hány utas van ő buszukon, és veszi az így kapott n válasz átlagát.

    Melyik módszert javasolnánk? Melyik módszer ad nagyobb eredményt?

Eredmények

1.

- $\mathbb{P}\{\text{hatos és páros}\}/\mathbb{P}\{\text{páros}\} = \frac{1}{6}/\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}\{\text{hatos és legalább hármas}\}/\mathbb{P}\{\text{legalább hármas}\} = \frac{1}{6}/\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
- 0.

2. 2/36 annak valószínűsége, hogy legalább az egyik kocka 2-es és az összeg 6, és 5/36 annak valószínűsége, hogy az összeg 6, így a válasz 2/5. Ha nem tudunk semmit, akkor egyik kocka sem kettes $\frac{5\cdot 5}{36}$ valószínűséggel, azaz legalább az egyik kocka kettes $1 - \frac{5\cdot 5}{36} = \frac{11}{36}$ valószínűséggel.

3. Lesz hatos, és a két kocka különböző számot mutat 10 esetben. A két kocka különbözőt mutat 36-6=30 esetben. Így a válasz 10/30 = 1/3.

4. A kérdés annak valószínűsége, hogy mindkét kocka 6-ost mutat, feltéve, hogy van köztük hatos. Mindkét esemény akkor és csak akkor következik be, ha mindkét kocka 6-ost mutat, ennek valószínűsége 1/36. Van a dobások között 6-os 11/36 valószínűséggel, így a válasz $\frac{1}{36}/\frac{11}{36} = \frac{1}{11}$.

5

(a) i.: $[50 + 60]/260 = 11/26$. ii.: $[50 + 40 + 10]/260 = 5/13$. iii.: $50/260 = 5/26$.

(b) $40/[40 + 80] = 1/3$.

(c) $10/[50 + 40 + 10] = 1/10$.

(d) Feltesszük, hogy a húzás visszatevés nélkül történik. Az első húzás fiú lesz $50/[50 + 40 + 10] = 1/2$ valószínűséggel. Ezután a második húzás lány lesz $40/[49 + 40 + 10] = 40/99$ valószínűséggel. A válasz e két szám szorzata, 20/99. Annak a valószínűsége, hogy mindkét húzás fiú lesz $\frac{1}{2} \cdot \frac{49}{99} = 49/198$.

6.(a) A család gyermekei sorrendben lehetnek: $(f,\ f)$, $(f,\ l)$, $(l,\ f)$, $(l,\ l)$. Én az f-ek közül bármelyik lehetek egyenlő eséllyel, ez összesen négy lehetőség. E négyből két esetben lány testvérem van, tehát a valószínűség $2/4 = 1/2$.

(b) Az $(f,\ f)$ esetben a király csak az idősebbik fiú lehet, illetve egyéb esetekben csak f lehet. Ez három egyenlő valószínűségű választás, és ebből két esetben lány a király testvére. A válasz ezért 2/3.

7.(a) A golyók szín szerint, sorrendben lehetnek $(a,\ a)$, $(a,\ f)$, $(f,\ a)$, $(f,\ f)$, mind a négy lehetőség egyenlő eséllyel. A feltételünk az, hogy van a golyók között aranyszínű, ami kiválasztja az első három lehetőséget. Ezeken belül a két aranyszínű golyó egy esetben fordul elő, így a válasz 1/3.

(b) A feltételünk most az, hogy az első golyó aranyszínű. Ez kiválasztja az első két lehetőséget, melyek közül egy esetben lesz mindkét golyó aranyszínű, így a válasz 1/2.

Megjegyzés: Abból, hogy az első golyó aranyszínű, következik, hogy van a golyók között aranyszínű. Azonban ez a két esemény nem ugyanaz, így a feltételes valószínűségek nem egyenlők:

$$\mathbb{P}\{\,\cdot\,|\,\text{van a golyók között aranyszínű}\} \neq \mathbb{P}\{\,\cdot\,|\,\text{az első golyó aranyszínű}\}.$$

8. Legyen K azaz esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott családnak kutyája van, M az az esemény, hogy macskája van. Ekkor adottak: $\mathbb{P}\{K\} = 0.36$, $\mathbb{P}\{M\} = 0.3$, $\mathbb{P}\{M\,|\,K\} = 0.22$. A válaszok:

(a) $\mathbb{P}\{K \cap M\} = \mathbb{P}\{M \mid K\} \cdot \mathbb{P}\{K\} = 0.22 \cdot 0.36 = 0.0792$, avagy 7.92%;

(b) $\mathbb{P}\{K \mid M\} = \mathbb{P}\{K \cap M\}/\mathbb{P}\{M\} = \mathbb{P}\{M \mid K\} \cdot \mathbb{P}\{K\}/\mathbb{P}\{M\} = 0.22 \cdot 0.36/0.3 = 0.264$, avagy 26.4%.

9. Összesen 14 golyó van az urnában, ezért

(a) $\frac{3}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{14}$,

(b) $\frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{12}$.

10. Legyen E_i az az esemény, hogy csótányunk az i-dik irtást túlélte, $i = 1, 2, 3$.

(a) $\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2 \cap E_3\} = \mathbb{P}\{E_3 \mid E_1 \cap E_2\} \cdot \mathbb{P}\{E_2 \mid E_1\} \cdot \mathbb{P}\{E_1\} = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.192$.

(b) $\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2 \cap E_3^c\} = \mathbb{P}\{E_3^c \mid E_1 \cap E_2\} \cdot \mathbb{P}\{E_2 \mid E_1\} \cdot \mathbb{P}\{E_1\} = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.048$.

(c) $\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2 \cap E_3 \mid E_1\} = \mathbb{P}\{E_1 \cap E_2 \cap E_3\}/\mathbb{P}\{E_1\} = \mathbb{P}\{E_3 \mid E_1 \cap E_2\} \cdot \mathbb{P}\{E_2 \mid E_1\} = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48$.

11. Legyen E_A az az esemény, hogy az A cég jelentkezett előbb, E_B az az esemény, hogy a B cég jelentkezett előbb, K_1 és K_2, hogy az első illetve második üzletkötés kedvező. Ekkor

(a) $\mathbb{P}\{K_1\} = \mathbb{P}\{K_1 \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{K_1 \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = 0.6 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.65$.

(b) $\mathbb{P}\{K_1 \cap K_2\} = \mathbb{P}\{K_1 \cap K_2 \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{K_1 \cap K_2 \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = 0.6^2 \cdot 0.5 + 0.7^2 \cdot 0.5 = 0.425$.

(c) $\mathbb{P}\{K_1 \cap K_2^c\} + \mathbb{P}\{K_1^c \cap K_2\} = 2\mathbb{P}\{K_1 \cap K_2^c\} = 2\mathbb{P}\{K_1 \cap K_2^c \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\} + 2\mathbb{P}\{K_1 \cap K_2^c \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.45$.

12.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E_1E_2E_3E_4\} &= \mathbb{P}\{E_4 \mid E_1E_2E_3\} \cdot \mathbb{P}\{E_3 \mid E_1E_2\} \cdot \mathbb{P}\{E_2 \mid E_1\} \cdot \mathbb{P}\{E_1\} \\ &= \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{4! \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \simeq 0.105.\end{aligned}$$

A törtek számlálóiban mindig leszámoljuk, hogy az adott helyzetben hányféleképp osztható egy darab ász a következő játékosnak. Az egyszerűsítés után kapott törtnek a jobb oldalon közvetlen jelentés is adható, ha meggondoljuk hányféleképpen osztható ki sorrendben a négy ász négy különböző 13 darabos blokkba, illetve hányféleképpen osztható ki sorrendben a négy ász 52 helyre mindenféle megkötés nélkül.

13. Legyenek A_1, A_2, A_3 azok az események, hogy a diák átmegy az első, második, harmadik vizsgán.

(a) $\mathbb{P}\{A_1A_2A_3\} = \mathbb{P}\{A_3 \mid A_1A_2\} \cdot \mathbb{P}\{A_2 \mid A_1\} \cdot \mathbb{P}\{A_1\} = 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.9 = 0.504$.

(b) Mivel a második vizsga sikertelensége ($A_1 \cap A_2^c$) benne van abban az eseményben, hogy valamelyik vizsga nem sikerül ($\{A_1A_2A_3\}^c$),

$$\mathbb{P}\{A_1 \cap A_2^c \mid \{A_1A_2A_3\}^c\} = \frac{\mathbb{P}\{A_1 \cap A_2^c\}}{\mathbb{P}\{\{A_1A_2A_3\}^c\}} = \frac{\mathbb{P}\{A_2^c \mid A_1\} \cdot \mathbb{P}\{A_1\}}{1 - \mathbb{P}\{A_1A_2A_3\}} = \frac{(1-0.8) \cdot 0.9}{1 - 0.504} \simeq 0.363.$$

14. Legyen K_i az az esemény, hogy Iván az i-edik kocsmában található. Ekkor K_i-k egymást kizáró események, és uniójuk valószínűsége 2/3. Iván nem válogatós volta miatt $\mathbb{P}\{K_i\} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$. A K_5 esemény része a $K_1^c \cap K_2^c \cap K_3^c \cap K_4^c$ eseménynek, ezért a keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{K_5 \mid K_1^c \cap K_2^c \cap K_3^c \cap K_4^c\} &= \frac{\mathbb{P}\{K_5\}}{\mathbb{P}\{K_1^c \cap K_2^c \cap K_3^c \cap K_4^c\}} = \frac{\mathbb{P}\{K_5\}}{\mathbb{P}\{\{K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4\}^c\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{K_5\}}{1 - \mathbb{P}\{K_1\} - \mathbb{P}\{K_2\} - \mathbb{P}\{K_3\} - \mathbb{P}\{K_4\}} \\ &= \frac{2/15}{1 - 2/15 - 2/15 - 2/15 - 2/15} = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

15. Legyen A az az esemény, hogy az érkező autós áthajt a vasúti átjárón, és T az az esemény, hogy az átjáró tilosat mutat. Adott $\mathbb{P}\{T\} = 0.05$, $\mathbb{P}\{A \mid T\} = 0.001$. Feltehetjük továbbá, hogy az autós biztosan áthajt a szabad jelzésen: $\mathbb{P}\{A \mid T^c\} = 1$. Bayes tétele szerint

$$\mathbb{P}\{T^c \mid A\} = \frac{\mathbb{P}\{A \mid T^c\} \cdot \mathbb{P}\{T^c\}}{\mathbb{P}\{A \mid T^c\} \cdot \mathbb{P}\{T^c\} + \mathbb{P}\{A \mid T\} \cdot \mathbb{P}\{T\}} = \frac{1 \cdot 0.95}{1 \cdot 0.95 + 0.001 \cdot 0.05} \simeq 0.99995,$$

azaz praktikusan egynek vehető. Nagyon pici annak az esélye, hogy az épp érkező autós szabálytalankodott, ahhoz képest, hogy szabad jelzésre szabályosan ment át.

18. Legyen J, A, R az az esemény, hogy egy véletleszerűen kiválasztott ügyfél jó, átlagos, vagy rossz vezető, ezek teljes eseményrendszert alkotnak. Legyen továbba B az az esemény, hogy az ügyfél baleset résztvevője lesz. Ekkor

$$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B \mid J\} \cdot \mathbb{P}\{J\} + \mathbb{P}\{B \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B \mid R\} \cdot \mathbb{P}\{R\} = 0.05 \cdot 0.2 + 0.15 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.175.$$

A második kérdésre a válaszok

$$\mathbb{P}\{J \mid B^c\} = \mathbb{P}\{B^c \mid J\} \cdot \frac{\mathbb{P}\{J\}}{\mathbb{P}\{B^c\}} = [1 - \mathbb{P}\{B \mid J\}] \cdot \frac{\mathbb{P}\{J\}}{1 - \mathbb{P}\{B\}} = [1 - 0.05] \cdot \frac{0.2}{1 - 0.175} \simeq 0.23.$$

Hasonlóan, $\mathbb{P}\{A \mid B^c\} \simeq 0.52$, $\mathbb{P}\{R \mid B^c\} \simeq 0.25$.

19. Legyen A_i az az esemény, hogy i jelet adtak ($i = 0, 1$), V_i az az esemény, hogy i-t vettünk. Adott $\mathbb{P}\{A_0\} = 1/3$, $\mathbb{P}\{A_1\} = 2/3$, $\mathbb{P}\{V_1 \mid A_0\} = 1/4$, $\mathbb{P}\{V_0 \mid A_1\} = 1/5$.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{V_0\} &= \mathbb{P}\{V_0 \mid A_0\} \cdot \mathbb{P}\{A_0\} + \mathbb{P}\{V_0 \mid A_1\} \cdot \mathbb{P}\{A_1\} \\ &= [1 - \mathbb{P}\{V_1 \mid A_0\}] \cdot \mathbb{P}\{A_0\} + \mathbb{P}\{V_0 \mid A_1\} \cdot \mathbb{P}\{A_1\} = \left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{23}{60}.\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{P}\{A_0 \mid V_0\} = \mathbb{P}\{V_0 \mid A_0\} \cdot \frac{\mathbb{P}\{A_0\}}{\mathbb{P}\{V_0\}} = \left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{1/3}{23/60} = \frac{15}{23}.$$

20. A két módszerrel más mérhető, a buszok átlagos utasszámát a (b) módszer adja. Az (a) módszer egy tipikus utas által tapasztalt tömeget tudja kimutatni. Az (a) esetben nagyobb esélyünk van olyan buszról mintát venni, ahol több utas utazik, míg a (b) módszerrel minden busz választása egyenlő valószínű. Ezért az (a) felmérés várhatóan nagyobb eredményt fog adni, mint a (b) felmérés. (Azaz: tipikus utasként nagyobb tömeget látunk a buszon, mint tipikus buszsofőrként.)