A3 vizsgazárthelyi, 2018. jún. 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	1 – 2. zh	$\sum\sum$	jegy

Név: Neptun-kód: Gyak. vezető:

A megoldásokhoz adjon magyarázatot!
Az utolsó <u>két</u> feladatból legalább 9 pontot el kell érnie!

1. (10p) Oldja meg az alábbi kezdetiérték-problémát: $y' - x^2y^2 = x^2,\ y(0) = 0.$

2. (10p) Oldja meg az alábbi kezdetiérték-problémát: $xy' - 2y = x^2,\ y(0) = 0.$

3. (10p) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $y'' + 4y = 3\sin x.$

4. (10p) Az alábbi két esemény közül melyik a valószínűbb:
   a) 6 kockadobásból legalább egy 6-osunk lesz.
   b) 12 kockadobásból legalább két hatosunk lesz.

5. (10p) Egy feleletválasztós tesztben minden kérdésre három válasz közül lehet választani. Kétféle diák írja a tesztet: az egyik találomra tölti ki, az ilyen diákok 30%-át teszik ki a válaszadóknak; a másik típus tanult valamit, ezért egy választ mindig kizár és a maradék két válasz közül találomra választ. Egy diák az első 6 kérdés közül 4-re adott helyes választ. Mi a valószínűsége, hogy a diák tanult a zh-ra?

6. (10p) Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} cx(4-x^2), & \text{ha } x \in (0,2), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   a) Mi a c konstans értéke?
   b) Mivel egyenlő a $P(-1 \le X \le 1)$ valószínűség?

* * *

7. (15p) Oldja meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$2x' = y' + y,\ y' = 2x' + 2x,\ x(0) = 1,\ y(0) = -1.$$

8. (15p) Egy repülőgép esetén a két meghibásodás között eltelt időtartam exponenciális eloszlást követ, 30 nap várható értékkel. A repülőt 100 meghibásodás után kivonják a forgalomból.
   a) Mennyi a forgalomból kivonási eltelt idő várható értéke?
   b) A CHT segítségével becsülje meg, mennyi a valószínűsége, hogy a repülő 3600 napnál tovább üzemelhet!

$\underline{1}.$ $y' \cdot \frac{1}{1+y^2} = x^2$, $\operatorname{arctg} y = \frac{x^3}{3} + c$

$c = 0$, $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3}\right)$

$\underline{2}.$ $y' - \frac{2}{x} \cdot y = x$ $\qquad Y_h' - \frac{2}{x} Y_h = 0$

$Y_h = c \cdot \underbrace{x^2}_{=Y}$ $\qquad y_p = \int q/Y = \ln|x| \;\; (+c)$

$y = Y_h + y_p = x^2(c + \ln|x|)$

(aki eddig eljutott, megkapta a maximális pontszámot)

Meg lehet mutatni, hogy az eredeti ~~felad~~ d.e. általános megoldása $y(x) = \begin{cases} x^2(c + \ln|x|), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$,

és így az eredeti feladat megoldása

$$y(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. $Y'' + 4Y = 0$ $\qquad r^2 + 4 = 0$

$r_{1,2} = \pm 2i$

$Y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$,

~~Az~~ egyenletben nincs rezonancia

$y_{pr} = A\cos x + B\sin x$ $\qquad A = 0$

$B = 1$

$y_{i,p} = \sin x$

$y_{i,\acute{a}lt} = Y_h + y_{i,p} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \sin x$

4. a) ~~Az~~ 6 dobásból X db hatosunk lesz.

$X \sim Bin(6, \frac{1}{6})$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665$

b) 12 dobásból Y hatosunk lesz.

$Y \sim Bin(12, \frac{1}{6})$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) =$

$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0,618$

5. A: a diák tanult

B: 6 kérdésre 4 találat

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) =$$
$$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.7 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 0.3$$

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.7}{\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.7 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 0.3} =$$

$$= 0.869$$

6. a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;

$$\int_0^2 c \cdot x \cdot (4 - x^2)\,dx = 4c \rightsquigarrow \quad c = \frac{1}{4}$$

b) $P(-1 \le X \le 1) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} x (4 - x^2)\,dx = \frac{7}{16}$$

7. $2Dx^{\cancel{1}} - (D+1)y = 0$ (*) $\Delta = \begin{vmatrix} 2D & -(D+1) \\ -2(D+1) & D \end{vmatrix} =$

$-2(D+1)x + Dy = 0$

$= -4D - 2$

$-4x' - 2x = 0 \rightsquigarrow x = c_1 e^{-t/2}$

$-4y' - 2y = 0 \rightsquigarrow y = c_2 e^{-t/2}$

Behelyettesítve ezeket a (*) egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = -c_1$.

Végül a kezdeti feltételek alapján kapjuk a megoldásokat: $x = e^{-t/2}$, $y = -e^{-t/2}$.

8. Legyen X_i az ~~i.~~ i-1.-től az i. meghibásodásig eltelt idő; $X_i \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{30}\right)$, $i = 1, 2, \dots, 100$.

a) $E(\underbrace{X_1 + \dots + X_{100}}_{S}) = 100 \cdot 30 = 3000$

b) $P(S > 3600) = P\left(\frac{S - 100 \cdot 30}{\sqrt{100} \cdot 30} > \frac{3600 - 100 \cdot 30}{\sqrt{100} \cdot 30}\right)$

CHT!

$\approx P(Z > 2) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$.