**Analízis fizikusoknak/mérnököknek további gyakorló feladatok**

**I./1. Minimumteszt.**
**A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.**

(1) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx =?$ (2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2}\, dx =?$ (3) $\dot{x} = -3x$, $x(0) = 5$; $x(t) =?$ (4) $\int \frac{1}{x(x+1)}\, dx =?$

(5) $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx =?$ (6) $\int \sin^3 x\, dx =?$ (7) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin^2(\frac{1}{n})}$ (8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^{n^n} =?$ (9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n =?$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx =?$ (11) $\int e^{\sin x} \cos x\, dx =?$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =?$ (13) $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx =?$ (14) $\int \frac{x+1}{x(1+x^2)}\, dx =?$

(15) $\int \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx =?$ (16) $\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx =?$ (17) $\int \frac{x^3}{1-x^2}\, dx =?$ (18) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx =?$

(19) $f(x) = x^{2x}$ $x_0 = 1$ pontbeli érintőegyenesének egyenlete?

(20) $f(x) = Ax + B$, ha $x < 0$ és $f(x) = \sin x$, ha $x \geq 0$. Milyen $A, B$-re lesz $f$ mindenhol diffható?

(21) $f(x) = Ax + B$, ha $x < 0$ és $f(x) = \sin x$, ha $x \geq 0$. Milyen $A, B$-re lesz $f$ mindenhol folytonos?

**I./2. Elméleti kérdések.**

1. Mit értünk az alatt, hogy az $a_n$ sorozat határértéke a véges $A$ szám? És az alatt, hogy a határértéke $+\infty$?
2. Mit mond ki a Bolzano-Weierstrass tétel?
3. Legyen $f(x)$ az $x_0$ pont egy környezetében 2017-szer differenciálható függvény. Igazak-e az alábbi állítások? Ha igen, vázoljuk, miért, ha nem, mutassunk ellenpéldát.
   A: „Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor $f$-nek $x_0$-ban szélsőértéke van.”
   B: „Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) = 0$, akkor $f$-nek $x_0$-ban inflexiós pontja van.”
4. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, igaz-e, hogy ekkor mindig értelmezhető és véges a grafikonjának az ívhossza? Ha igen, vázoljuk, miért, ha nem, adjunk ellenpéldát.
5. A téglalap fogalmából és annak területképletéből kiindulva definiáljuk, mit jelent, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaz Jordan mérhető. Mutassunk példát olyan $A$ halmazra, amely nem Jordan mérhető (és indokoljuk röviden, hogy miért nem az).

**II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.**

1. Határozzuk meg a $x^2y' - \cos(2y) = 1$ differenciálegyenletnek azt az $y(x)$ megoldását, amelyre a $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} =?$ (b) Konvergens vagy divergens? $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x) \ln^3(\ln(x))}$
3. Számítsuk ki az $y = \ln \cos x, 0 \leq x \frac{\pi}{4}$ görbe ívhosszát!
4. Forgassuk meg az $f(x) = \sin x, x \geq 0$ függvény gráfja, az $x_0 = \pi/2$ pontbeli érintője és az $y$ tengely által határolt korlátos tartományt az $x$ tengely körül, és számoljuk ki a kapott forgástest térfogatát.
5. Legyen $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
   (a) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!
   (b) Keressük meg azt a maximális intervallumot, amely az $x = 5$ pontot tartalmazza, és amelyre megszorítva $f$ invertálható, és rajzoljuk fel az az így adódó inverz függvény grafikonját.
   (c) Határozzuk meg az inverz függvény deriváltját az $\frac{e}{2}$ pontban.
6. Tekintsük az $1 + \ln(xy^2) - \frac{1}{y} = e^{y^2-1}$ implicit alakban adott görbét! Mutassuk meg, hogy az $(x_0, y_0) = (e, 1)$ pont illeszkedik a görbére! Mi ebben a pontban a görbét érintő egyenes egyenlete?
7. Határozzuk meg az $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ görbeszakasz $x$ tengely körüli megforgatásával kapott felület felszínét!
8. Adjuk meg az $e^{2y}(1 + \sin x - \cos x)y' = e^{2y} + 1$ differenciálegyenlet általános megoldását és az $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást!
9. (a) Konvergens vagy divergens? $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}+1}{n!}$
   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha})$ az $\alpha$ paraméter mely értékeire abszolút konvergens, konvergens, feltételesen konvergens illetve divergens?
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} =?$
   (d) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\, dx$ konvergens vagy divergens?