

Matematika ÉP2

Térgörbék

2022/23. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Fogalmak

A térbeli görbéket egy t paramétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Úgy képzelhetjük, hogy a térgörbe egy a 3 dimenziós térben mozgó pont pályája (a mozgás egyszerű). Rögzítsük tehát az origóból kiinduló \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} páronként merőleges egységvektorokat. Ekkor egy az origóból kiinduló vektort a következőképpen adhatunk meg:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}, \text{ vagy} \\ \underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

A paraméter jelölésére azért a t betűt használjuk (t =tempus), mert úgy gondolhatjuk, hogy $\underline{r}(t)$ nem más, mint a mozgó pont pozíciója t időpontban. Matematikai szempontból az $\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ skalár változótól függő vektor értékű függvény. Erre a függvényosztályra a függvénytanban tanult fogalmak és módszerek könnyen átültethetőek. A következőkben feltesszük, hogy az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, például legalább háromszor differenciálhatóak.

Derivált

Az $\underline{r}(t)$ görbe t_0 pontbeli deriváltja az egyváltozós esethez hasonlóan határértékkel definiálható. Kiszámolása:

$$\dot{\underline{r}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)].$$

Tehát a deriváltat itt a fizikában megszokott módon ponttal jelöljük. A görbét definiáló $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t_0 pontbeli érintőjének irányvektora az $\dot{\underline{r}}(t_0) = [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$ derivált. Tehát az $\underline{r}(t)$ görbe $\underline{r}(t_0) = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ pontbeli érintőegyeneseinek egyenlete:

$$\underline{e}(t) = \underline{r}(t_0) + \dot{\underline{r}}(t_0) \cdot t = [x(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot t, y(t_0) + \dot{y}(t_0) \cdot t, z(t_0) + \dot{z}(t_0) \cdot t],$$

ahol $-\infty < t < \infty$.

Az első derivált fizikai jelentése: Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont sebessége a t_0 időpillanatban $\dot{\underline{r}}(t_0)$.

A második derivált fizikai jelentése: Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont gyorsulása a t_0 időpillanatban $\ddot{\underline{r}}(t_0)$. (Megjegyzés: A gyorsulásvektor érintőirányú komponense a tangenciális gyorsulás, míg az erre merőleges komponense a centripetális gyorsulás.)

Ívhossz

Az $\underline{r}(t)$ görbének az $\underline{r}(t_1)$ és $\underline{r}(t_2)$ pontok közötti darabjának ívhossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt.$$

Ha az $\underline{r}(t)$ görbére úgy tekintünk, mint egy mozgó pont pályájára, akkor a $v = \dot{\underline{r}}(t)$ sebesség abszolút értéke $|\dot{\underline{r}}(t)|$ és a t_1, t_2 időpontok között megtett út épp a fenti s .

Megjegyzés: Ha egy pont úgy mozog a görbén, hogy a sebességének abszolút értéke minden időpillanatban $|\dot{\underline{r}}(t)| = 1$, akkor a t idő alatt megtett út $s = t$. Az így választott paraméterezést hívjuk ívhossz szerinti paraméterezésnek.

Görbület

A görbülettel a térgörbének az egyenestől való elhajlását mérjük. Olyan mennyiséget akarunk bevezetni, amely nem függ a görbe paraméterezésétől, csak a görbére jellemző. Így az $\underline{r}(t)$ görbe t paraméterű pontjában a görbület:

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}.$$

Kísérő triéder

A kísérő triéder (vagy három él) vektorai:

1. Az érintő irányú egységvektort (érintővektort) \underline{t} -vel jelöljük és

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t)|}.$$

2. A centripetális gyorsulás (a gyorsulásvektor érintőirányú komponensére merőleges vektor) egységvektort főnormálisnak nevezünk és \underline{n} -nel jelöljük. Ekkor

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}.$$

3. A binormális vektor a \underline{t} érintővektorra és az \underline{n} főnormálisra egyaránt merőleges és velük jobbrendszer alkotó egységvektor.

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}.$$

A sebesség- és gyorsulásvektor által meghatározott síkot *simulósíknak* nevezük. A simulósík tehát az $\dot{\underline{r}}(t)$ és $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektorok által meghatározott sík. Tartalmazza a \underline{t} és \underline{n} vektorokat. A simulósík normálisa a \underline{b} binormális egységvektor.

A *normálsík* a görbére merőleges sík. Normálisa tehát az $\dot{\underline{r}}(t)$ érintővektor. A normálsík tartalmazza az \underline{n} normális és \underline{b} binormális vektorokat.

A *rektifikáló sík* a \underline{t} és \underline{b} vektorok által meghatározott sík. Normálisa az \underline{n} főnormális vektor.

Torzió

A torzióval a térgörbének a síkgörbétől való elhajlását mérjük. Most is olyan mennyiséget akarunk bevezetni, amely nem függ a görbe paraméterezésétől, csak a görbére jellemző. Így az $\underline{r}(t)$ görbe t paraméterű pontjában a torzió:

$$T = \frac{\dot{\underline{r}}(t)\ddot{\underline{r}}(t)\ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|^2}.$$

A térgörbe görbülete mindig nemnegatív szám. Ezzel szemben a torzió előjeles mennyiség. A torzió pozitív, ha a görbe jobbra csavarodik és negatív, ha balra. Egy síkgörbe torziója zérus.

2. Feladatok

1. Írja fel az alábbi térgörbék adott pontbeli érintőegyensének egyenletét!

$$(a) \underline{r}(t) = (t-3)\underline{i} + (t^2+1)\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t=2 \quad (b) \underline{r}(t) = \sin t\underline{i} + \cos t\underline{j} + \frac{1}{\cos t}\underline{k}, \quad t=0$$

$$(c) \underline{r}(t) = 2t\underline{i} + \frac{2}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t=2 \quad (d) \underline{r}(t) = \frac{t}{1+t}\underline{i} + \frac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t=1$$

2. Számolja ki az alábbi térgörbék adott szakaszának ívhosszát!

$$(a) \underline{r}(t) = 3 \cos t\underline{i} + 3 \sin t\underline{j} + 2t\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi \quad (b) \underline{r}(t) = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}t^4\underline{k}, \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$(c) \underline{r}(t) = e^t \cos t\underline{i} + e^t \sin t\underline{j} + 2e^t\underline{k}, \quad -\infty \leq t \leq 0 \quad (d) \underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(e) \underline{r}(t) = 3t \cos(t) \cdot \underline{i} + 3t \sin(t) \cdot \underline{j} + 2\sqrt{2}t^{3/2} \cdot \underline{k}, \quad 1 \leq t \leq 3$$

3. Számolja ki az alábbi térgörbék adott pontjában a kísérő triédert, illetve adja meg a simulósík, a normálsík és a rektifikálósík egyenletét! Emellett számolja ki a megadott pontban a görbületet és a torziót!

$$(a) \underline{r}(t) = (3t^2 - 3t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}, \quad t=2 \quad (b) \underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}, \quad t=-1$$

$$(c) \underline{r}(t) = \frac{t^4}{4}\underline{i} + \frac{t^3}{3}\underline{j} + \frac{t^2}{2}\underline{k}, \quad t=1 \quad (d) \underline{r}(t) = (3t+7)\underline{i} + (2t^2+8)\underline{j} + \frac{1}{6}t^3\underline{k}, \quad t=1$$

$$(e) \underline{r}(t) = (t^3 - 2t)\underline{i} + (3t+2)\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}, \quad t=1 \quad (f) \underline{r}(t) = \cos^2 t\underline{i} + \cos t \sin t\underline{j} + \sin^2 t\underline{k}, \quad t = \frac{\pi}{6}$$

4. Határozza meg az $\underline{r}(t) = (\cos t, t \sin t, (t+6 \sin t))$ térgörbe görbületét a $t = \frac{3\pi}{2}$ pontban!

5. Határozza meg az $\underline{r}(t) = (t, e^{(t+1)^2}, e^{2t+2})$ térgörbe görbületét a $t = -1$ pontban!

6. Tekintsük az $\underline{r}(t) = (t, t, \sqrt{2} \operatorname{ch} t)$ görbét a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. Mely pontokban lesz a görbület $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

7. Határozza meg azokat a pontokat, ahol az $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$ görbe érintője merőleges lesz az $x + y + z = 1$ síkra!

8. Tekintsük az $\underline{r}(t) = (t, t, \operatorname{sh} t)$ görbét a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. Mely pontokban lesz a görbe érintője merőleges az $x + y + z = 1$ síkra?