

Matematika ÉP2

Felületek, 12. hét feladatsora

2014/15. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Fogalmak

A felületeket két skalárparamétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Szokásos módon rögzítjük tehát az origóból kiinduló $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként merőleges egységvektorokat. Ekkor egy az origóból kiinduló térbeli vektort a következőképpen adhatunk meg:

$$\underline{r}(u, v) = x(u, v)\underline{i} + y(u, v)\underline{j} + z(u, v)\underline{k},$$

vagy

$$\underline{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)].$$

A következőkben - a görbékhez hasonlóan - feltesszük, hogy az $x(u, v)$, $y(u, v)$ és $z(u, v)$ kétváltozós függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, például elég sokszor differenciálhatóak.

Ha a v paramétert rögzítjük ($v = v_0$) és csak az u paramétert változtatjuk, akkor az

$$\underline{r}(u, v_0) = [x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)]$$

függvény egy felületi görbét ír le. Különböző rögzített v értékek esetén egy felületi görbesereget kapunk. Hasonlóan az u paraméter rögzített értékeihez egy másik görbesereg tartozik. Úgy is elképzelhetjük a felület ilyen típusú megadását, mintha a felületen futó görbék hálózatával jellemeznénk a felületet.

Felületi normális, érintősíkc

Az $\underline{r}(u, v_0) = [x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)]$ görbe tetszőleges u paraméterű pontjában az érintővektor az u szerinti derivált, azaz

$$\underline{r}_u(u, v_0) = [x_u(u, v_0), y_u(u, v_0), z_u(u, v_0)].$$

Ez a vektor érintő a felülethez is. Hasonlóan az $\underline{r}(u_0, v) = [x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)]$ görbe tetszőleges v paraméterű pontjában az érintővektor a v szerinti derivált, azaz

$$\underline{r}_v(u_0, v) = [x_v(u_0, v), y_v(u_0, v), z_v(u_0, v)].$$

Ez a vektor szintén érintő a felülethez is.

A *felületi normális* mindkét érintővektorra merőleges, tehát előállítható a következő alakban:

$$\underline{n} = \underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v).$$

Amennyiben bevezetjük a *Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeket*

$$E = (\underline{r}_u)^2 \quad F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v \quad G = (\underline{r}_v)^2,$$

akkor a felületi normális hossza a következő képlettel számolható:

$$|\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Az $\underline{n}$ felületi normális segítségével felírhatjuk a felület tetszőleges u_0, v_0 paraméterű pontjában az *érintő sík egyenletét*:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0,$$

ahol $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ és $\underline{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Felületi görbék ívhossza

Az $u = u(t), v = v(t)$ paraméterezéssel és a $t_1 < t < t_2$ feltétellel kijelölhetünk a felületen egy $\underline{r}(u(t), v(t))$ görbedarabot. Ezen görbe megadott darabjának *ív hossza* az

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v})^2} dt$$

formulával számolható, ahol pont jelzi a t változó szerinti deriválást és alsó index az u vagy v változó szerinti parciális deriválást.

A Gauss-féle elsőrendű főmennyiségek használatával az ívhosszt a következő formulával is számolhatjuk:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$$

Felületdarab felszíne

Ha az u, v paramétersíkon kijelölünk egy T tartományt, akkor ez meghatározza az $\underline{r}(u, v)$ felület egy darabját. Ezen felületdarab felszíne az alábbi kettősintegrállal számolható ki:

$$\mathcal{F} = \int \int_T |\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)| du dv = \int \int_T \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Felületi pontok osztályozása

Képzeljük el, hogy a felület valamely pontjában az érintő síkot egy picit elmozdítjuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy belemetszen a felületbe. a kapott metszetgörbének vegyük a másodrendű közelítését. A másodrendű görbe lehet ellipszis, hiperbola vagy parabola. Ennek megfelelően a felületi pont lehet elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus. A felületi pont jellegének kiszámítása a következőképpen történik. Először is bevezetjük a *Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket*:

$$L = \underline{r}_{uu} \cdot \underline{n}^0 \quad M = \underline{r}_{uv} \cdot \underline{n}^0 \quad N = \underline{r}_{vv} \cdot \underline{n}^0,$$

ahol $\underline{n}^0$ jelöli az egységnyi hosszú felületi normálist. Ekkor

1. ha $LN - M^2 > 0$, akkor a felületi pont elliptikus,
2. ha $LN - M^2 < 0$, akkor a felületi pont hiperbolikus,
3. ha $LN - M^2 = 0$, akkor a felületi pont parabolikus.

Megjegyzés: Ha a felület $z = f(x, y), (x, y) \in T$ alakban adott, akkor az $LN - M^2$ kifejezés előjele megegyezik az

$$f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2$$

kifejezés előjelével.

2. Feladatok

1. Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és alkotójának iránya az $\underline{a}$ vektor! (Segítség: A henger általános egyenlete: $\underline{r}(u, v) = \underline{\rho}(u) + v\underline{a}$.)

(a) $\underline{\rho}(u) = 2 \cos u \underline{j} + 3 \sin u \underline{k}, \quad \underline{a} = \underline{i}$

(b) $\underline{\rho}(u) = 3 \operatorname{ch} u \underline{i} + \operatorname{sh} u \underline{k}, \quad \underline{a} = \underline{j}$

(c) $\underline{\rho}(u) = (2 \sin u + 3 \operatorname{tg} u) \underline{i} + 2 \cos u \underline{j}, \quad \underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} + 4 \underline{k}$

2. Írja fel annak a kúpnek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és csúcspontja az $\underline{a}$ helyvektor végpontja! (Segítség: A kúp általános egyenlete: $\underline{r}(u, v) = \underline{\rho}(u) + v(\underline{a} - \underline{\rho}(u)) = (1-v)\underline{\rho}(u) + v\underline{a}$.)

(a) $\underline{\rho}(u) = \operatorname{sh} u \underline{i} + \operatorname{ch} u \underline{j}, \quad \underline{a} = 5 \underline{k}$

(b) $\underline{\rho}(u) = u \underline{i} + u^4 \underline{j}, \quad \underline{a} = 3 \underline{j} + 7 \underline{k}$

3. Írja fel annak a forgásfelületnek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek meridiángörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!

(a) $\underline{\rho}(u) = (3 + 2 \cos u) \underline{i} + (4 + 2 \sin u) \underline{j}, \quad y\text{-tengely}$

(b) $\underline{\rho}(u) = u \underline{j} + (u^2 + 1) \underline{k}, \quad z\text{-tengely}$

(c) $\underline{\rho}(u) = u \underline{j} + (u^2 + 5) \underline{k}, \quad y\text{-tengely}$

4. Írja fel az alábbi felületek adott pontbeli érintősíkjának egyenletét! (Megjegyzés: ha a felület $z = f(x, y)$ alakban adott, akkor a felület vektoregyenletes felírása: $\underline{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.)

(a) $\underline{r}(u, v) = (u^3 - 2v^2) \underline{i} + uv^2 \underline{j} + (u^2v - u) \underline{k}, \quad u = 1, v = -2$

(b) $\underline{r}(u, v) = u \cos v \underline{i} + u \sin v \underline{j} + v \underline{k}, \quad \text{tetszőleges pontban}$

(c) $\underline{r}(u, v) = 3 \sin u \cos v \underline{i} + 3 \sin u \sin v \underline{j} + 3 \cos u \underline{k}, \quad u = \frac{\pi}{2}, v = \frac{\pi}{3}$

(d) $\underline{r}(u, v) = u \underline{i} + v \underline{j} + (u^2 + v^2) \underline{k}, \quad u = 1, v = 2$

(e) $\underline{r}(u, v) = (3 + 2 \cos u) \cos v \underline{i} + (3 + 2 \cos u) \sin v \underline{j} + 2 \sin u \underline{k}, \quad u = \frac{\pi}{4}, v = -\frac{\pi}{2}$

(f) $x^2y + z^3 = 12, \quad P(1, 2, 2)$

5. Számolja ki az alábbi felületek felszínét a megadott tartományon!

(a) R sugarú gömb: $\underline{r}(u, v) = R \cos u \cos v \underline{i} + R \cos u \sin v \underline{j} + R \sin u \underline{k}$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $v \in [0, 2\pi]$

(b) Tórusz: $\underline{r}(u, v) = (3 + 2 \cos u) \cos v \underline{i} + (3 + 2 \cos u) \sin v \underline{j} + 2 \sin u \underline{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$

(c) 90° nyílásszögű kúp egy része: $\underline{r}(u, v) = u \cos v \underline{i} + u \sin v \underline{j} + u \underline{k}$, $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq v \leq 2\pi$

(d) $\underline{r}(u, v) = 3u \cos v \underline{i} + 3u \sin v \underline{j} + v \underline{k}$, $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq v \leq 2\pi$

(e) $\underline{r}(u, v) = u \underline{i} + v \underline{j} + (u^2 + v^2) \underline{k}$, ha (u, v) az origó körüli 2 sugarú kört futja végig

(f) $\underline{r}(u, v) = \cosh u \cos v \underline{i} + u \underline{j} + \sinh u \sin v \underline{k}$, $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq 2\pi$

(g) Csavarfelület: $\underline{r}(u, v) = u \cos v \underline{i} + u \sin v \underline{j} + v \underline{k}$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$

(h) $\underline{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u) \underline{i} + (\sin u + v \cos u) \underline{j} + (u + v) \underline{k}$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 1$

(i) $\underline{r}(u, v) = u^2 \cos v \underline{i} + u^2 \underline{j} + u^2 \sin v \underline{k}$, $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \pi$

(j) $\underline{r}(u, v) = \ln u \underline{i} + \ln u \sin v \underline{j} + \ln u \cos v \underline{k}$, $1 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \pi$

6. Ellenőrizze le, hogy az $\underline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ felület minden pontja parabolikus!

7. Mutassa meg, hogy az $\underline{r}(u, v) = (\sin v, v, u)$ felület minden pontja parabolikus!

8. Bizonyítsa be, hogy a tórusz külső részén fekvő pontok elliptikusak, a belső részén fekvő pontok hiperbolikusak, a legfelső és legalsó kör minden pontja parabolikus! (tórusz: $\underline{r}(u, v) = (a + b \cos u) \cos v \underline{i} + (a + b \cos u) \sin v \underline{j} + b \sin u \underline{k}$)

9. Mutassa meg, hogy a $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ alakban megadott felület minden pontja hiperbolikus!

10. Határozza meg a $3z + 3xz - yz + x + y = 0$ alakban megadott felület esetén az origóban a felület típusát!

11. Határozza meg az $\underline{r}(u, v) = (u^2 + v^2, u + v, u^2 v^2)$ felület $(u_0, v_0) = (1, -1)$ pontjában a felület típusát!

12. Lásza be, hogy a $z = x^4 - y^4$ alakban megadott felület minden pontja hiperbolikus!

13. Határozza meg, hogy az R sugarú gömb $(R, 0, 0)$ pontjában milyen típusú a felület!