

Matematika ÉP2

Elsőrendű differenciálegyenletek, 2. feladatsor

2018/19. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Mik is azok a differenciálegyenletek?

A mindennapi életben játszódó mozgásokat, folyamatokat és jelenségeket függvényekkel lehet leírni. Olyan egyenleteket írhatunk fel, amelyekben a folyamatot leíró függvény és annak valahányad rendű deriváltjai szerepelnek. Az ilyen függvényegyenleteket differenciálegyenleteknek nevezzük és célunk a megoldásfüggvény megtalálása. Az egyenletben szereplő legmagasabb derivált rendjét a differenciálegyenlet *rendjének* hívjuk. A differenciálegyenlet *általános megoldása* nem más, mint az összes megoldást tartalmazó halmaz. Gyakran egy további, úgynevezett kezdeti feltételt kielégítő, *partikuláris megoldást* keresünk. Egy differenciálegyenletet a hozzá tartozó kezdeti feltételekkel együtt *Cauchy-feladatnak* vagy *kezdetiérték-problémának* nevezzük.

A differenciálegyenletekkel kapcsolatosan felmerülő kérdéseink egyike, hogy milyen feltételekkel létezik egyáltalán megoldás, és ha ezt már tisztáztuk, akkor mikor mondhatjuk, hogy ez a megoldás egyértelmű. Mivel a differenciálegyenletek csak közelítik a valóságot, de sosem írják le pontosan, így nem hivatkozhatunk arra, hogy a megoldás azért létezik és egyértelmű, mert konkrét jelentéssel bír a gyakorlatban. Ugyanakkor pontos matematikai tételek léteznek azzal kapcsolatban, hogy mely feltételek teljesülése esetén lesz a Cauchy feladatnak egyértelmű megoldása. A továbbiakban feltesszük, hogy a függvényeink kellően "szépek", és a megoldás létezését nem vitatjuk.

Elsőrendű szétválasztható változójú (szeeparálható) differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű szétválasztható változójú egyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' = f(x)g(y)$$

A megoldás menete: Először megkeressük azokat az azonosan konstans y függvényeket, melyekre $g(y) = 0$. Ezek megoldások. A következő lépésben felírjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

majd pedig szeparáljuk az x -et és y -t tartalmazó függvényeket az egyenlet két különböző oldalára. Ezt követően integrálunk, azaz felírjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

Ha mindkét oldal integrálható, akkor x és y között kapunk egy összefüggést, amelyből jó esetben kifejezhető y . (Amennyiben Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy az adott feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Ha a fenti egyenlet jobb oldalán $q(x) \equiv 0$, akkor homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk van. Ez pontosan a következő alakot jelenti: $y' + p(x)y = 0$.

Megoldás menete: Az inhomogén egyenlet megoldása két részből áll. Előbb megkeressük homogén egyenlet általános megoldását, majd ezt követi az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése az állandók variálásának módszerével. Végül ezeket összeadva adódik az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{\text{IH, Á}} = y_{\text{H, Á}} + y_{\text{IH, P}}.$$

(Amennyiben itt is Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy az adott feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

2. Feladatok

1. * Egy tartályban 10 liter tiszta víz van, melybe literenként 0, 25 kg só tartalmazó oldat folyik be 2 liter/perc sebességgel. A befolyó oldat azonnal összekeveredik a tartályban lévő folyadékkal, és ez a keverék ugyanazzal a 2 liter/perc sebességgel kifolyik a tartályból. Adjuk meg a differenciálegyenletet, mely leírja, hogy a t időpontban mennyi só lesz a tartályban!

2. Határozza meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' = 3(x-1)^2 y$ (b) $y' = \frac{y^4}{3}$

(c) $y' = (y^2 + 1)e^{-2x}$ (d) $\frac{y'}{x} = \frac{\sin x}{\cos y}$

(e) $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$ (f)* $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$

3. Adja meg implicit alakban a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $(x + xy^2)y' = 3$ (b) $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$

4. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (szétválasztható változójú egyenletek)!

(a) $(x+1)y' = y-2$, $y(-3) = 1$ (b) $y \cdot y' = \frac{e^x}{1+e^x}$, $y(1) = 1$

(c) $(x^2 - 1)y' = xy$, $y(\sqrt{2}) = -1$ (d)* $y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = 1$

5. Az $y' = 3(x-1)^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 1$?

6. Az $y' = (y^2 + 1)e^{-2x}$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 1 helyen, ha $y(0) = 0$?

7. Szórjunk 8 gramm tömegű anyagot oldószerbe. Az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos. Az oldódást leíró differenciálegyenlet $\frac{dy}{dt} = (8 - y)$, ahol y jelöli a t idő alatt feloldódott anyag mennyiségét. 1 perc múlva mennyi a feloldódott anyag mennyisége? (Segítség: az $\frac{dy}{dt} = (8 - y)$ differenciálegyenletet kell megoldani az $y(0) = 0$ kezdeti feltétellel, majd az adódó $y(t)$ függvény segítségével válaszolni kell a feltett kérdésre)
8. Egy kezdetben $0^\circ C$ -os testet kiviszünk a szabadba ahol a hőmérséklet $20^\circ C$. Jelölje $y(t)$ a test hőmérsékletét t perc után. A Newton-féle hűlési/felmelegedési törvény szerint a test hőmérsékletének változási sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével. A kezdeti feltételt is figyelembe véve ez azt jelenti, hogy $y(t)$ -t a következő Cauchy probléma megoldásaként kaphatjuk $y' = -k(y(t) - 20), y(0) = 0$, ahol $k > 0$ egy a körülményektől függő arányossági tényező. 1 perc elteltével megmérjük a test hőmérsékletét, azt tapasztaljuk, hogy $10^\circ C$ -os. Hány fokos lesz 2 perc múlva?
9. * Szórjunk m tömegű anyagot oldószerbe. az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos, azaz az oldódást leíró differenciálegyenlet $\frac{dx}{dt} = k(m - x)$, ahol x jelöli a t idő alatt feloldódott anyag mennyiségét, k arányossági tényező. Ha 1 perc alatt az anyag 20%-a oldódik fel, akkor 3 perc alatt hány százaléka? (Azaz $x(0) = 0, x(1) = 0,2m, x(3) = ?$)
10. Oldjuk meg az 1. feladat differenciálegyenletét, majd válaszoljunk a következő kérdésekre: mennyi só lesz a tartályban 10 perc múlva? Mennyi lesz a só mennyisége a tartályban, ha nagyon sokáig magára hagyjuk a rendszert?
11. Határozza meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!
- (a) $y' + xy - x = 0$ (b) $\cos x \cdot y' = -\sin x \cdot y + \cos^2 x$
- (c) $(x^2 + 4) y' - 2xy = (x^2 + 4)^2 \cos x$ (d) * $xy' - \frac{y}{x+1} = x$
12. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (elsőrendű lineáris egyenletek)!
- (a) $y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1$ (b) $xy' - 2y = x^3 e^x, \quad y(1) = 2$
- (c) $xy' + 2y = x^4, \quad y(1) = -2$ (d) $y' + x^2 y = x^2, \quad y(2) = 1$