

Második A4 gyakorlat

1. Binomiális eloszlás

Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n -szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej (tehát lehet, hogy hamis), akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

$$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Például, pontosan 3 hatos valószínűsége 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3} (1/6)^3 (5/6)^{17}$.

1. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel eltalálok. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?
2. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell? Hány jó válasz a legvalószínűbb?
3. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után
 - (a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
 - (b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
 - (c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?

2. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel esik, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú részintervallumba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$;

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}.$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}.$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}.$$

17. Egy körbe szabályos háromszöget rajzolunk. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a pont a háromszög belsejébe esik?
18. A $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?
19. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?
20. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?
21. *Általános Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra d cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, majd egy $2l$ cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?
22. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?
23. *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?
 - (a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrunk tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.
 - (b) A kör területén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrunk.
 - (c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrunk, aminek ez a pont a felezőpontja.