11. MATEMATIKA A2 FELADATSOR - MEGOLDÁSOK

1. Határozza meg az alábbi függvények x- és y-szerinti parciális deriváltját

   (a) $f(x,y) = x^3y^4$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^4$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y^3$

   (b) $f(x,y) = 6x^4\sqrt{y} - 43xy^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^3\sqrt{y} - 43y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^4y^{-0,5} - 86xy$

   (c) $f(x,y) = \ln(3x+2y+1)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{3x+2y+1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3x+2y+1}$

   (d) $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+2y^2}2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+2y^2}4y$

   (e) $f(x,y) = \sin\big(4x - xy^7\big)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\big(4x - xy^7\big)(4 - y^7)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\big(4x - xy^7\big)(-7xy^6)$

   (f) $f(x,y) = (3x+6y)(4x^2y^8 - 2)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(4x^2y^8 - 2) + (3x+6y)8xy^8$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6(4x^2y^8 - 2) + (3x + 6y)32x^2y^7$

   (g) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{xy} + (x^2+y^2)e^{xy}y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{xy} + (x^2+y^2)e^{xy}x$

   (h) $f(x,y) = (3x-2y)\cos(5-x-2y)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cos(5-x-2y) + (3x-2y)\sin(5-x-2y)(-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2\cos(5-x-2y) + (3x-2y)\sin(5-x-2y)(-2)$

   (i) $f(x,y) = \frac{x+y}{2x-y^2}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1(2x-y^2)-(x+y)2}{(2x-y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1(2x-y^2)-(x+y)(-2y)}{(2x-y^2)^2}$

   (j) $f(x,y) = \frac{e^x-e^y}{x-y}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x(x-y)-(e^x-e^y)1}{x-y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-e^y(x-y)-(e^x-e^y)(-1)}{x-y}$

2. Határozza meg az alábbi függvények második parciális deriváltjait!

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$

   (b) $f(x,y) = x^3 - x^2y^2 + y$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -4xy$

   (c) $f(x,y) = e^{xy}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{xy}y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{xy}x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^{xy}xy$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{4x-y}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4(4x-y)^{-1,5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -0,25(4x-y)^{-1,5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -(4x-y)^{-1,5}$

   (e) $f(x,y) = 3x^5 - 2y^3\ln(4x+6y)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^4 - \frac{8y^3}{4x+6y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -6y^2\ln(4x+6y) - \frac{12y^3}{4x+6y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 60x^3 + \frac{32y^3}{4x+6y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\left(12y\ln(4x+6y) + 6y^2\frac{6}{4x+6y}\right) - \left(\frac{36y^2(4x+6y)-12y^3 6}{(4x+6y)^2}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{24y^2(4x+6y)-8y^3 6}{(4x+6y)^2}$

3. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját!

   (a) $f(x,y) = 3x+7y$, $P(1,2)$, $\underline{v} = (0,6;0,8)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 7$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 7$, $|\underline{v}| = 1$, ezért $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 3\cdot 0,6 + 7\cdot 0,8 = 7,4$

   (b) $f(x,y) = x^3+y^3$, $P(-1,3)$, $\underline{v} = (1,2)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,3) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,3) = 27$, $|\underline{v}| = \sqrt{5}$, ezért $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 3\frac{1}{\sqrt{5}} + 27\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{57}{\sqrt{5}}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, $P(2,-1)$, $\underline{v} = (4,3)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\frac{1}{2}(9-x^2-y^2)^{-0,5}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\frac{1}{2}(9-x^2-y^2)^{-0,5}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = 5$, ezért $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = -1\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{5} = -\frac{1}{2}$

   (d) $f(x,y) = xy$, $P(3,2)$, $\underline{v} = (5,12)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = 3$, $|\underline{v}| = 13$, ezért $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 2\frac{5}{13} + 3\frac{12}{13} = \frac{46}{13}$

   (e) $f(x,y) = x^2-y^2$, $P(-1,-1)$, $\underline{v} = (2,3)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = 2$, $|\underline{v}| = \sqrt{13}$, ezért $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = -2\frac{2}{\sqrt{13}} + 2\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

4. Határozza meg az alábbi függvények melyik irányban emelkednek a legjobbban az adott pontban!

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (4,3)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(4,3) = 8$, $\frac{\partial f}{\partial y}(4,3) = 6$, $gradf(4,3) = (8,6)$

(b) $f(x,y) = 2x - 3y$, $(x_0, y_0) = (1,2)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -3$, $gradf(1,2) = (2,-3)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1,1)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\frac{1}{2}(6-x^2-y^2)^{-0,5}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\frac{1}{2}(6-x^2-y^2)^{-0,5}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$, $gradf(1,1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

(d) $f(x,y) = xy$, $(x_0, y_0) = (2,-3)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3) = -3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3) = 2$, $gradf(2,-3) = (-3,2)$

5. Határozza meg az alábbi függvények által meghatározott felület érintősíkját az adott pontban!

(a) $f(x,y) = 6x - 2y$, $(x_0, y_0) = (4,1)$: $f(4,1) = 22$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(4,1) = -2$, $\underline{n} = (6,-2,-1)$, a sík egyenlete $6(x-4) - 2(y-1) - (z-22) = 0$, azaz $6x - 2y - z = 0$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (-1,2)$: $f(-1,2) = -3$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -4$, $\underline{n} = (-2,-4,-1)$, a sík egyenlete $-2(x-(-1)) - 4(y-2) - (z-(-3)) = 0$, azaz $-2x - 4y - z = -3$

(c) $f(x,y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1,3)$: $f(1,3) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\frac{1}{2}(14 - x^2 - y^2)^{-0,5}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\frac{1}{2}(14 - x^2 - y^2)^{-0,5}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -\frac{3}{2}$, $\underline{n} = (-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -1)$, a sík egyenlete $-\frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2}(y-3) - (z-2) = 0$, azaz $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - z = -7$

(d) $f(x,y) = 10 - x^2 - y$, $(x_0, y_0) = (2,1)$: $f(2,1) = 5$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$, $\underline{n} = (-4,-1,-1)$, a sík egyenlete $-4(x-2) - (y-1) - (z-5) = 0$, azaz $-4x - y - z = -14$

6. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények által meghatározott felület adott síkkal párhuzamos érintősíkját!

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $z = 2x+3y+1$: a sík egyenlete $2x+3y-z = -1$, azaz $\underline{n} = (2,3,-1)||(f'_x, f'_y, -1) = (2x, 2y, -1)$, ezért $2x = 2$, $2y = 3$, azaz $(x_0, y_0) = (1; 1,5)$

(b) $f(x,y) = x^2-y^2$, $x+3y+4z = 5$: $\underline{n} = (1,3,4)||(f'_x, f'_y, -1) = (2x, -2y, -1)$, ezért $(2x, -2y, -1) = -\frac{1}{4}(1,3,4) = (-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -1)$, $2x = -\frac{1}{4}$, $-2y = -\frac{3}{4}$, azaz $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{8}; \frac{3}{8})$

(c) $f(x,y) = x^3 + xy^2$, $z = 4x + 2y + 1$: $\underline{n} = (4,2,-1)||(f'_x, f'_y, -1) = (3x^2 + y^2, 2xy, -1)$, ezért $3x^2+y^2 = 4$, $2xy = 2$, tehát $xy = 1$, $y = \frac{1}{x}$. Azt kapjuk, hogy $3x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$, tehát $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$. Ez x^2-ben másodfokú egyenlet, aminek gyökei: $x_1^2 = 1$ és $x_2^2 = \frac{1}{3}$. Tehát $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Innen azt kapjuk, hogy négy pontban lesz az érintősík párhuzamos a megadott síkkal: $(x_0, y_0) = (1,1)$ vagy $(-1,-1)$ vagy $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$ vagy $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3})$.

7. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 4y + 7$: $f'_x = 2x + y + 2 = 0$, $f'_y = 4y + x + 4 = 0$, ezért $(x_0, y_0) = (-\frac{4}{7}, -\frac{6}{7})$, $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{xy} = 1$, ezért a Hesse determináns: $H = f''_{xx}f''_{xy} - (f''_{xy})^2 = 7 > 0$ és $f''_{xx} = 2 > 0$, így $(x_0, y_0) = (-\frac{4}{7}, -\frac{6}{7})$-ben lokális minimum van.

(b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$: $f'_x = e^{x^2+y^2}2x = 0$, $f'_y = e^{x^2+y^2}2y = 0$, ezért $(x_0, y_0) = (0,0)$, $f''_{xx} = e^{x^2+y^2}(4x^2+2)$, $f''_{yy} = e^{x^2+y^2}(4x^2+2)$, $f''_{xy} = e^{x^2+y^2}4xy$, ezért a Hesse determináns: $H = f''_{xx}f''_{xy} - (f''_{xy})^2 = (e^{x^2+y^2})^2(4x^2+2)(4y^2+2) - (e^{x^2+y^2})^2 16x^2y^2$. Tehát $H(0,0) = 4 > 0$ és $f''_{xx}(0,0) = 2 > 0$, így $(x_0, y_0) = (0,0)$-ban lokális minimum van.

(c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$: : $f'_x = 4x^3 - 4y = 0$, $f'_y = 4y^3 - 4y = 0$, ezért $x^3 = y$ és $y^3 = x$, tehát $x^9 = x$. Innen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ és $x_3 = 0$, azaz $(x_1, y_1) = (1,1)$, $(x_2, y_2) = (-1,-1)$ és $(x_3, y_3 = (0,0))$. Most $f''_{xx} = 12x^2$, $f''_{yy} = 12y^2$, $f''_{xy} = -4$, ezért a Hesse determináns: $H = f''_{xx} f''_{xy} - (f''_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$. Ha $(x_1, y_1) = (1,1)$, akkor $H(1,1) = 128 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 12 > 0$, így $(x_1, y_1) = (1,1)$-ben lokális minimum van. Ha $(x_2, y_2) = (-1,-1)$, akkor $H(-1,-1) = 128 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 12 > 0$, így $(x_2, y_2) = (-1,-1)$-ben szintén lokális minimum van. Ha $(x_3, y_3) = (0,0)$, akkor $H(0,0) = -16$, így $(0,0)$-ban nincs szélsőérték.

(d) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$, $x > 0$, $y > 0$: $f'_x = -\frac{1}{x^2} + y = 0$, $f'_y = -\frac{1}{y^2} + x = 0$, ezért $y = \frac{1}{x^2}$ és $x = \frac{1}{y^2}$, tehát $xy^2 = 1$ és $x^2y = 1$. Innen $xy^2 = x^2y$, azaz $x = y$, tehát $x^3 = 1$. Így $(x_0, y_0) = (1,1)$. Most $f''_{xx} = \frac{2}{x^3}$, $f''_{yy} = \frac{2}{y^3}$, $f''_{xy} = 1$, ezért a Hesse determináns: $H = f''_{xx} f''_{xy} - (f''_{xy})^2 = \frac{4}{x^3y^3} - 1$. Tehát $H(1,1) = 3 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 2 > 0$, így $(x_0, y_0) = (1,1)$-ben lokális minimum van.

8. (a) Határozza meg az 1 egység térfogatú hasábok közül a legkisebb felszínűt!

Legyenek a hasáb élei: $x > 0$, $y > 0$ és $z > 0$. Ekkor $xyz = 1$, tehát $z = \frac{1}{xy}$. A felszín:

$$A = 2xy + 2xz + 2yz = 2xy + 2x\frac{1}{xy} + 2y\frac{1}{xy} = 2xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = A(x,y),$$

aminek a minimumát keressük. Ekkor $\frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2}{x^2} = 0$, tehát $y = \frac{1}{x^2}$. Továbbá $\frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2}{y^2} = 0$, tehát $x = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4$, tehát $x = 1$. Ekkor $y = 1$. Most $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4}{x^3}$, $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4}{y^3}$ és $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 2$, így $H = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{16}{x^3y^3} - 4$. Tehát $H(1,1) = 12 > 0$ és $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 4 > 0$, így $(1,1)$-ben minimum van.

(b) Határozza meg a 6 egység felszínű hasábok közül a legnagyobb térfogatút!

Legyenek a hasáb élei: $x > 0$, $y > 0$ és $z > 0$. Ekkor $2xy + 2xz + 2yz = 6$, tehát $z = \frac{3-xy}{x+y}$. Ekkor

$$V = xyz = \frac{3xy - x^2y^2}{x+y} = V(x,y).$$

Ekkor

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{(3y - 2xy^2)(x+y) - (3xy - x^2y^2)1}{(x+y)^2} = \frac{y\left((3-2xy)(x+y) - (3x - x^2y)\right)}{(x+y)^2} = \frac{y^2(3 - x^2 - 2xy)}{(x+y)^2}$$

és

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{(3x - 2x^2y)(x+y) - (3xy - x^2y^2)1}{(x+y)^2} = \frac{x\left((3-2xy)(x+y) - (3y - xy^2)\right)}{(x+y)^2} = \frac{x^2(3 - y^2 - 2xy)}{(x+y)^2}.$$

Ha $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$, akkor $3 = x^2 + 2xy$. Ha $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$, akkor $3 = y^2 + 2xy$. Tehát $3 = x^2 + 2xy = y^2 + 2xy$, ezért $x^2 = y^2$, azaz $x = y$. Így $3 = 3x^2$, tehát $x = 1$ és $y = 1$. Így $z = 1$, azaz a kocka a válasz. A szélsőérték jellegét most nem ellenőrizzük.

9. Határozza meg az 1 sugarú gömbbe írható maximális térfogatú hasáb térfogatát!

Az 1 sugarú origó középpontú gömb egyenlete $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Innen a felső félgömb függvénye $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ha a téglatest egyik csúcsa (x,y,z), $x > 0$, $y > 0$ és $z > 0$, akkor a téglatest térfogata

$$V = 8xyz = 8xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} = V(x,y)$$

Ekkor

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8y\sqrt{1 - x^2 - y^2} + 8xy0,5(1 - x^2 - y^2)^{-0,5}(-2x) = \frac{8y(1 - x^2 - y^2) - 8x^2y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{8y(1 - 2x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 8x\sqrt{1-x^2-y^2} + 8xy0,5(1-x^2-y^2)^{-0,5}(-2y) = \frac{8x(1-x^2-y^2) - 8xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{8x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Ha $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, akkor $1 = 2x^2 + y^2$. Ha $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, akkor $1 = x^2 + 2y^2$. Tehát $1 = 2x^2 + y^2 = x^2 + 2y^2$, ezért $x^2 = y^2$, azaz $x = y$. Így $1 = 3x^2$, tehát $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}} = z$, azaz a kocka a megoldás. A szélsőérték jellegét most nem ellenőrizzük.

10. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények feltételes szélsőértékeit a Lagrange-féle multiplikátort használva!

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $2x - y = 3$

A feltétel $2x - y - 3 = 0$, ezért a Lagrange-multiplikátor: $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(2x - y - 3)$, ezért

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2y - \lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x - y - 3 = 0$$

tehát $\lambda = 2y = -x$, azaz $x = -2y$. Így $2x - y - 3 = 0$, azaz $-4y - y - 3 = 0$, tehát $y = -0,6$ és $x = 1,2$, azaz $(1,2; -0,6)$-ban van lokális szélsőérték.

(b) $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 1$

A feltétel $x^2 + y^2 - 1 = 0$, így a Lagrange-multiplikátor: $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, ezért

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda 2x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = x + \lambda 2y = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Tehát az első egyenletet y-nal, a másodikat x-szel szorozva kapjuk, hogy $y^2 + 2\lambda xy = x^2 + 2\lambda xy$, ezért $x^2 = y^2$. Innen $x = \pm y$, így $2x^2 = 1$, tehát $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Így négy pontot kapunk: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ és $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0,5$$

$$f(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -0,5$$

$$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0,5$$

és

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -0,5,$$

ezért a maximum $0,5$ és minimum $-0,5$.

(c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x + y = 3$

A feltétel $x + y - 3 = 0$, így a Lagrange-multiplikátor: $L(x, y, \lambda) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \lambda(x + y - 3)$, ezért

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} + \lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 3 = 0$$

Tehát

$$\lambda = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}},$$

ezért $x = y$, így $2x - 3 = 0$. Innen $x = 1,5 = y$, tehát $(1,5; 1,5)$-ben van lokális szélsőérték.

11. Határozza meg a Lagrange-féle multiplikátort használva, hogy az 1 egység területű téglalapok közül melyik kerülete a legkisebb!

    Legyenek a téglalap oldalai x és y. Ekkor $xy = 1$, tehát $xy - 1 = 0$. A kerület $2x + 2y$, aminek a minimmumát keressük. Ekkor a Lagrange-multiplikátor: $L(x, y, \lambda) = 2x + 2y + \lambda(xy - 1)$. Így

    $$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + \lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2 + \lambda x = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - 1 = 0$$

    Tehát $2 + \lambda y = 2 + \lambda x$, ezért $x = y$, így $x^2 = 1$, tehát $x = y = 1$, azaz a megoldás négyzet.

12. Határozza meg a Lagrange-féle multiplikátort használva, hogy az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszisbe írható téglalapok közül melyik területe maximális!

    Legyen a téglalap első síknegyedbe eső csúcsának koordinátái: (x, y). Ekkor a téglalap kerülete $4xy$, így a Lagrange-multiplikátor

    $$L(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1).$$

    Ekkor

    $$\frac{\partial L}{\partial x} = 4y + \lambda\frac{2x}{4} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x + \lambda\frac{2y}{9} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

    Tehát $\lambda = -\frac{16y}{2x}$ és $\lambda = -\frac{36x}{2y}$, ezért $-\frac{16y}{2x} = -\frac{36x}{2y}$, tehát $y^2 = \frac{9}{4}x^2$, ezért $y = \frac{3}{2}x$. Innen az ellipszis egyenletéből kapjuk, hogy $\frac{x^2}{4} + \frac{\frac{9}{4}x^2}{9} = 1$, azaz $\frac{2x^2}{4} = 1$, ezért $x = \sqrt{2}$ és $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Tehát a maximális terület $4\sqrt{2}\frac{3}{2}\sqrt{2} = 12$.