

- 7.1 Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?
- 7.2 Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel, hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórással normális eloszlást követ. A tesztek megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?
- 7.3 Tegyük fel, hogy X normális eloszlású 5 várható értékkel. Ha $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?
- 7.4 •• Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalok magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 178$ és $\sigma^2 = 144$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalok hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?
- 7.5 Mutassuk meg, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (Tipp: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Helyettesítsünk $y = \sqrt{2x}$ -et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!)

Bónusz: Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált „abszolút momentumait” (φ a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) |y|^k dy, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(Tipp: páros $k = 2\ell$ -re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:

$$\left. \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} dy \right|_{\lambda=1}$$

Páratlan $k = 2\ell + 1$ -re hajtsuk végre a $z = y^2$ változócsere az A_k -t definiáló integrálban.)

- 7.6 Legyen az X valószínűségi változó normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $t \in \mathbb{R}$ -re az $\mathbf{E}(e^{tX})$ várható értéket! (Tipp: ez egy egyszerű integrálhelyettesítéssel visszavezethető a normális sűrűségfüggvény integráljára.)
- 7.7 Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban kapott képlet akkor is érvényes marad, ha t tetszőleges komplex szám! (Vigyázat: a normális sűrűségfüggvény integrálját csak a *valós* számegyenesen tanultuk, hogy mennyi. A bizonyításhoz kell valami komoly az analízisből.)
- 7.8 Legyen X nulla várható értékű és σ szórással, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) < \mathbf{P}\{X > x\} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}$$

(Tipp: differenciáljuk az egyenlőtlenség lánc mindhárom tagját, és hasonlítsuk össze a deriváltakat.)

- 7.9 Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 100.000 pókerleosztás során a fullok száma 128 és 158 közé essen.
- 7.10 Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat és egy hamisat, ami 57% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk, igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 535-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 535-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?
- 7.11 Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal a következő módon: megkérdezzük n véletlenszerűen kiválasztott lakost, és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n -et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.93 valószínűséggel 0.02 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0, 1)$ -re és $n \geq n_0$ -ra
- $$\mathbf{P}\{|p' - p| \leq 0.02\} \geq 0.93.$$

- 7.12 Az előző feladat kicsit máshogy ☺

Budapest utcáin az emberek 42%-a támogatná, hogy közterületen ne lehessen dohányozni. Közelítsük azt a valószínűséget, hogy n megkérdezett ember közül legalább 40% a betiltás mellett nyilatkozik, ha

- a) $n = 11$,
 b) $n = 101$,
 c) $n = 1001$.
 d) Hány embert kellene megkérdeznünk, hogy legalább 95% eséllyel 40% felett legyenek a betiltást támogatók?

7.13 *** Az ún. Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen az egyszerűség kedvéért $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvény, és az

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

integrál értékét becsljük. Ha U és V két független $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az (U, V) pár a $[0, 1]^2$ egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva n véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje X_n azon pontok számát, amelyek az f függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre $V < f(U)$. Ekkor I becslését az X_n/n hányados adja. Mekkora a n értékét, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb 0.02 valószínűséggel kapjunk 0.1-nél nagyobb hibát, ha a Monte Carlo-integrálás módszerét

- a) az $f(x) = x^3$ függvényre alkalmazzuk?
- b) egy ismeretlen $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvényre alkalmazzuk?

7.14 Van két egyforma biztosítótársaság egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

7.16 ** A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 24 hónap várható értékkel. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy

- a) 5 kirakott pohárból legfeljebb 3 törik el egy év alatt;
- b) 500 kirakott pohárból legfeljebb 210 törik el egy év alatt! (Adjuk meg a numerikus értéket is!)

7.17 A vajsámium radioaktív bomló részecske átlagos élettartama 1 év. Mennyi ennek a részecskefajtának a felezési ideje?

7.18 A „Fény az éjszakában” típusú villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A gyártó mérései szerint a körték 90 százaléka bírja legalább egy évig. Mennyi időre vállalhat a gyártó garanciát a körték működésére, ha azt akarja, hogy a vevőknek legfeljebb 1 százaléka reklamáljon?

7.19 Reggel a földalatti szerelvények követési ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel. Az egyik szerelvényt pont lekéstem.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 percet várnom kell a következőre?
- b) Már 3 perce várok hiába. Mennyi a valószínűsége, hogy még további 5 percig várnom kell?

7.22 Egy nagyon gyors számítógépen futó program, miután elindult, minden órajel hatására (vagyis nagyon gyakran) megpróbál lefagyni – feltéve, hogy ez korábban nem sikerült neki – és valamilyen nagyon kicsi valószínűséggel le is fagy. A tapasztalat szerint ez a program az indítás után átlagosan 1 órával fagy le. Mi a lefagyásig eltelt (órában mért) idő eloszlása?

7.23 Pistike nyári estén csillaghullást néz. Egy-egy nyári estén nagyon sok meteor éri el a Földet, ezek mindegyikének egymástól függetlenül, nagyon kis valószínűséggel sikerül Pistike szeme elé kerülni – vagyis pont akkor és ott esni le, amikor és ahol Pistike látja. Így ő fél óra alatt átlagosan hármát lát lehullani. Augusztus 19-én este 22:00-kor kezdi nézni az eget.

- a) Mi a valószínűsége, hogy 22:00 és 22:25 között egyetlen hullócsillagot sem lát?
- b) Mi a valószínűsége, hogy T perc alatt egyetlen hullócsillagot sem lát, ahol $T \in \mathbb{R}^+$?
- c) Az X valószínűségi változó legyen az az idő (percben mérve), amennyit Pistikének az első hullócsillag megpillantására várnia kell. Számoljuk ki X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
- d) Fogalmazzuk meg szépen a tanulságot!

7.24 *** A HOMÁLY cég kétféle kompakt fénycsövet forgalmaz, az A és B típusok várható élettartama rendre 6000, illetve 10000 óra, mindkét esetben exponenciális eloszlással.

- a) Egy egyetemi előadóterem két lámpájában egyszerre cserélik a fénycsöveket, tehát ha az egyik fénycső kiég, mindkettőt lecserélik. A legutóbbi csere alkalmával az egyik lámpába A, a másikba B típusú fénycső került. Mi a valószínűsége, hogy a következő csere kevesebb, mint 3000 óra elteltével lesz szükség? És ha tudjuk, hogy a legutóbbi csere óta 2000 óra telt el, mi a valószínűsége, hogy további 3000 óráig nem lesz szükség cserére? (Az egyes fénycsövek élettartama függetlennek tekinthető.)
- b) A takarékoság jegyében a doktorandusz szobába egy olcsó boltból szerzik be a fénycsövet, ahol azokat csomagolás nélkül, a rendtelenség miatt jól összekeveredve tárolják. A kupac 15%-a "selejtes", be se kapcsol, a maradék egyenlő arányban A, illetve B típusú. Vaktában választva, mi lesz a doktorandusz szobába kerülő fénycső élettartamának eloszlásfüggvénye?
- c) Mi a valószínűsége, hogy a doktorandusz szobába kerülő fénycső több, mint 3000 óráig bírja? És ha ez a fénycső már kibírt 2000 órát, mi a valószínűsége, hogy még további 4000 óráig bírni fogja?