Matematika M1 egészségügyi mérnököknek
házi feladatok, 2022 tavasz

1 Gyökközelítési módszerek

Beadási határidő: 2022.03.01

Legyen $f(x) = x^5 + x - 1$.

1.1 Ábrázold $f(x)$-et hozzávetőlegesen a $[0, 2]$ intervallumon! (Pl. egy táblázatkezelőben kirajzoltatott grafikont másolj le szemre.)

1.2 Válassz egy véletlen a_0 pontot a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumból. Válassz egy véletlen b_0 pontot a $[\frac{3}{2}, 2]$ intervallumból.

   a.) Győződj meg róla, hogy $f(a_0)$ és $f(b_0)$ különböző előjelű!

   b.) Alkalmazd az intervallum-felező módszert az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásának keresésére $[a_0, b_0]$ kiinduló intervallummal! Az eljárást addig folytasd, amíg meg nem találod a megoldást $\varepsilon = 0.01$ pontossággal.

1.3 Válassz egy véletlen x_0 pontot a $[\frac{3}{2}, 2]$ intervallumból. Keresd meg az $f(x) = 0$ egyenlet (egy) megoldását érintő (Newton) módszerrel, az eljárást x_0-ból indítva, legalább 6 tizedesjegy pontossággal!

1.4 Válassz egy véletlen x_0 pontot a $[\frac{7}{4}, 2]$ intervallumból, és egy x_1-et az $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ intervallumból. Keresd meg az $f(x) = 0$ egyenlet (egy) megoldását húr módszerrel, az eljárást az (x_0, x_1) pontpárból indítva, legalább 6 tizedesjegy pontossággal!

2 Numerikus sorok

Beadási határidő: 2022.03.10

Minden megoldást indokolni kell!

2.1 Az alábbi számsorokról mondjuk meg, hogy alkalmazható-e az integrál-kritérium (közvetlenül) a konvergenciájuk vizsgálatára vagy sem. *(Emlékeztető: az integrál-kritériumnak nem csak állítása van, hanem feltételei is.)* Amelyikre a kritérium alkalmazható, arról döntsük el a segítségével, hogy konvergens vagy divergens.

   a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$

   b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

   c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{n}$

   d.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{5-n^2}$

2.2 Döntsük el az összehasonlító kritérium segítségével – valamelyik ismert sorral való összehasonlítással – hogy az alábbi számsorok konvergensek vagy divergensek.

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^3+n^2+n+1}$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n+10}$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

2.3 Mennyi az alábbi sorok összege?

a.) $2 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9} - \frac{16}{29} + \frac{32}{81} - \dots$

b.) $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \dots \pm \frac{1}{n!} \pm \dots$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *(Tipp: számoljuk ki az első néhány részletösszeget.)*

3 Hatványsorok, Taylor sorok

Beadási határidő: 2022.03.22

Minden megoldást indokolni kell!

3.1 Keressük meg az alábbi függvények Taylor sorát az adott pont körül!

a.) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x - 4$ az $x_0 = 0$ körül.

b.) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x - 4$ az $x_0 = 1$ körül.

c.) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ az $x_0 = 0$ körül. *(Tipp: az $y := -\frac{x^2}{2}$ jelölés segít.)*

d.) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ az $x_0 = 0$ körül. *(Tipp: az $\frac{1}{1-y}$ könnyű lenne, ez meg hasonlít rá.) (Tipp 2: de úgy is lehet, hogy lederiváljuk végtelen sokszor.)*

3.2 Taylor közelítés: **Sajtóhibás :(**

a.) Írjuk fel az alábbi függvényekhez a megadott fokszámú (nulla körüli) Taylor polinomokat (vagyis a Taylor sor elejét).

b.) Számoljuk ki a Taylor polinomok értékét (vagyis a függvény Taylor közelítését) az $x_1 = 0.5$ helyen (számológéppel).

c.) Számoljuk ki a függvény pontos értékét az $x_1 = 0.5$ helyen (számológéppel)

d.) Számoljuk ki a Taylor közelítés hibáját – vagyis a közelítés és a pontos érték eltérését.

$f(x)$	n fokszám	$T_n(x)$ Taylor polinom	$T_n(0.5)$ közelítés	$f(0.5)$ pontos érték	hiba
$\sin(x)$	3				
$\sin(x)$	5				
$\sin(x)$	7				
$\ln(x)$	3				
$\ln(x)$	5				
$\ln(x)$	7				

3.3 Az egyes tényezők Taylor sorának elejét kiírva keressük meg a következő határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1-2x)(\sin(3x)-3x)}{x^3\sin^2(x)}$$

Ellenőrzésképpen nézzük meg, mit ad az $x = 0.01$ helyettesítés!

4 Fourier sorfejtés

Beadási határidő: 2022.05.03

Minden megoldást indokolni kell!

4.1 Legyenek $A = 1$, $B = 3 + 2i$, $C = 2 + 3i$, $D = 1 + 2i$ és $E = 3$ komplex számok és legyen a $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény $T(z) = 2iz$. Rajzoljuk le az $A - B - C - D - E - B - D - A - E$ és a $T(A) - T(B) - T(C) - T(D) - T(E) - T(B) - T(D) - T(A) - T(E)$ töröttvonalakat!

4.2 a.) Legyen $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$. Írjuk fel $f(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ alakban, ahol $A, B \in \mathbb{C}$.

b.) Legyen $g(x) = 2e^{ix} + 3e^{-ix}$. Írjuk fel $g(x) = C\cos x + D\sin x$ alakban, ahol $C, D \in \mathbb{C}$.

4.3 Legyen $f(x) = \cos(x) + 2\sin(2x) + 3\cos(3x)$. Írjuk fel f-et komplex Fourier sor alakban, vagyis $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ alakban, ahol $a_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4.4 Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus és $0 \le x < 2\pi$-re $f(x) = x$.

a.) Írjuk fel f-et komplex Fourier sor alakban, vagyis $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ alakban, ahol $a_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b.) Írjuk fel f-et valós Fourier sor alakban, vagyis $f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$ alakban, ahol $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$, $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3\ldots)$

5 kétváltozós deriválás, integrálás

Beadási határidő: 2022.05.17

Minden megoldást indokolni kell!

5.1 Tekintsük az $f(x, y) = \sin(\frac{\pi}{4}x)\sin(\frac{\pi}{4}y)$ függvényt a $D = \{(x, y) \mid -1 <\le x \le 3\,, -1 <\le y \le 3\}$ halmazon. Keressük meg f lokális minimumhelyeit, lokális maximumhelyeit, nyeregpontjait, valamint globális minimumát és maximumát a D halmazon!

(Vigyázat: a globális szélsőértékhelyek lehetnek lokális szélsőértékhelyek, de lehetnek az értelmezési tartomány határán is.)

(Tipp: a függvény periodikus, így végtelen sok lokális szélsőértékhelye van, de minket csak az érdekel, amelyik benne van D-ben.)

5.2 Legyen $A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le x\} \subset \mathbb{R}^2$ és legyen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Számítsuk ki az $\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kettősintegrált! (Előtte mindenképpen rajzoljuk le az A halmazt.)

5.3 Számoljuk ki az $\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ kettősintegrált! *(Tipp: az integrálok felcserélésével könnyű, anélkül nehéz. A cserénél ügyelni kell a határokra!)*