1.

a.) Ez már önmaga Taylor sor alakban van (mivel polinom):

$$f(x) = -1 + 3x^3 - 9x^9 + 27x^{27} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{ahol}$$

$$a_0 = -1\ ;\ a_3 = 3;\ a_9 = -9\ ;\ a_{27} = 27$$

és a többi $a_n = 0$

b.) $g(x) = \ln(2+x) = \ln\left[2\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$.

Az $u(y) := \ln(1+y)$ Taylor sora már ismert (illetve könnyű):

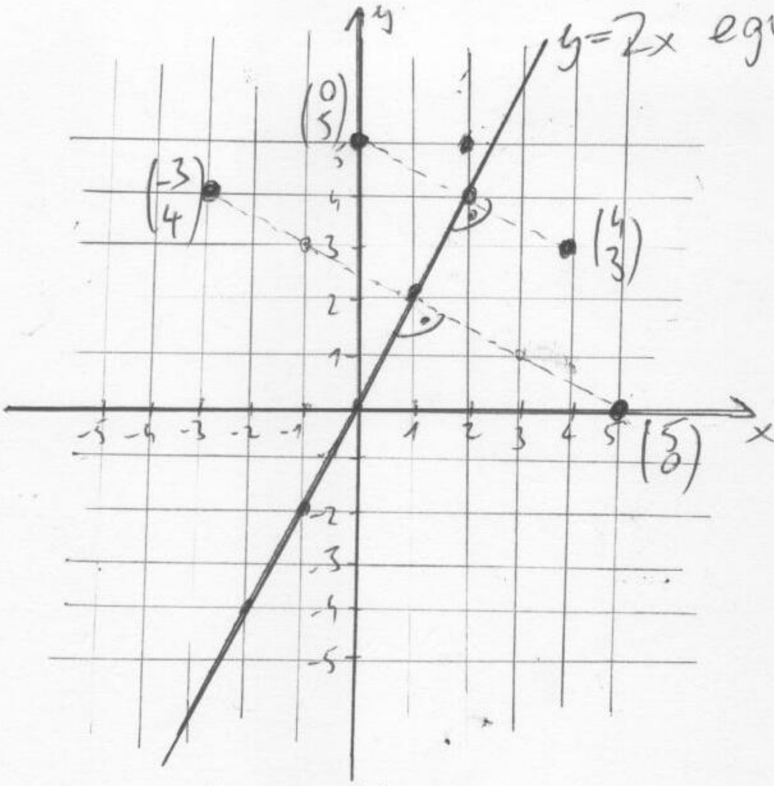
$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots$$

$$\overset{y:=\frac{x}{2}}{\Longrightarrow} \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \cancel{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{y^3}{12} - \frac{y^4}{16} + y}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \ln(2+x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 2^3}x^3 - \frac{1}{4\cdot 2^4}x^4 + \frac{1}{5\cdot 2^5}x^5 - \dots}$$

$\boxed{2.}$



A rajzról $T\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

A linearitás miatt

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\left(\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\,T\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=T\left(\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\,T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ T mátrixa $\begin{pmatrix}-3/5 & 4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix}$

$\boxed{3.}$

Bövitett mátrix alakban, Gauss eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim$$

2. sorhoz hozzáadom az 1. sort

3. sorból levonom az 1. sor 3-szorosát

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

a 3. sorhoz hozzáadom a 2. sort

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Az utolsó egyenletet kiolvasva

$0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d = -1$

vagyis $\boxed{0 = -1}$

Ellentmondás $\Longrightarrow$ NINCS MEGOLDÁS.

$\boxed{4.}$

A mátrix háromszögmátrix $\Longrightarrow$ determinánsa a főátló elemeinek szorzata $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 = 180 \neq 0$, így a mátrix invertálható, ezért a lineáris egyenletrendszernek pontosan 1 megoldása van.

Mivel az egyenletrendszer homogén (vagyis a jobboldal nulla), nyilvánvalóan megoldás a $\boxed{v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$, ami így az egyetlen megoldás is.

$\boxed{5.}$

a.) Az $(A-\lambda I)v=0$ homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol $\lambda=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 5-1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

eliminációval

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \quad x=0$$

2. sorhoz hozzáadom az 1. sort $3/2$-szer

$4y-2z=0$

vagyis $y=\frac{z}{2}$

3 sorhoz hozzáadom az 1. sor 2-szer

a 2. és 3. sor ugyanaz

Egy sajátvektor $z=2$ választással a $\boxed{v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}$, a többi ennek számszorosa.

b.) Ezek a v vektorok pont a $\lambda=2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $(A-2\cdot I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -3/2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

2. sort szorzom 3-mel

3. sort osztom (−2)-vel

2 ⟷ 3. sor csere

1. sor törölhető

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -z=0 \quad \boxed{z=0}$$

2. sorhoz hozzáadom az 1. sort 3x

$x-2y+\cancel{z}=0 \qquad x=2y$

5 folyt.

Pl. $y=1$ választással jön a $\boxed{V_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$ vektor,

A többi megoldás ennek számszorosa.

c) $$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = V_1 + V_2$$

$$\xrightarrow{\text{linearitás}} \boxed{A^{10}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}} = A^{10}(V_1+V_2) = A^{10}V_1 + A^{10}V_2 \underset{\text{sajátvektorok}}{\overset{V_1,\,V_2}{=}}$$

$$= 1^{10}V_1 + 2^{10}V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2^{10}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2048\\1025\\2\end{pmatrix}}$$