Matematika M1 egészségügyi mérnököknek
gyakorló feladatok, 2022 tavasz

Az alábbi feladatok Sándor Csaba A2 gyakorló feladatsoraiból származnak – helyenként apró módosításokkal. Köszönet értük.

1. Végtelen sorok

1.1 Határozza meg az alábbi végtelen sorok összegét!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}-e^n}{e^{3n}}$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{6^{n+1}}$

1.2 Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek és melyek divergensek! Válaszukat indokolják!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2009^n}{n^{2009}}$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}$

d.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n+6^n}{3^n+7^n}$

e.) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

f.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

1.3 Mely a esetén konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$ sor?

1.4 Az alább megadott végtelen sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

b.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

c.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

d.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

e.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+4}$

f.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-4}$

g.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

h.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

i.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{lnn}$

j.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

k.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1^n)\frac{n+1}{n+2}$

1.5 Az alábbi sorok közül melyek az abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek?

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 0.1^n$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{5+n}$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+4}$

2. Hatványsorok

2.1 Adjuk meg az itt szereplő sorok konvergenciasugarát és konvergencia-intervallumát! *(Tipp: próbáljunk ki néhány x-et, és látszani fog.)*

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

d.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

e.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

2.2 Mely x-ek esetén konvergens az

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \ldots$$

végtelen sor? Mi a sor összege? Melyik sort kapjuk tagonkénti deriválással? Mely x-ek esetén konvergens az új sor?

3. Taylor-sorok

3.1 Határozzuk meg az $f(x)$ által (az adott a pont körül) generált Taylor-sort!

a.) $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 0$

b.) $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$

c.) $f(x) = e^x, \quad a = 2$

d.) $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$

e.) $f(x) = \arctan 2x, \quad a = 2$

3.2 Adjuk meg a függvények Taylor-sorát az $x = 0$ helyen!

a.) xe^x

b.) $x \cos \pi x$

c.) $\cos^2 x$ *(Tipp:* $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$*)*

d.) $\frac{1}{(1-x)^2}$

3.3 Sorok segítségével számítsuk ki a határértékeket!

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$

b.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-arctgx}{x^3}$

c.) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

3.4 **Bónusz feladat:** Sorok segítségével adjunk 10^{-3} pontosságú becslést az alábbi határozott integrálokra!

a.) $\int\limits_0^{0.2} \sin x^2 dx$

b.) $\int\limits_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$

c.) $\int\limits_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$

4. Lineáris egyenletrendszerek

4.1 A k konstans mely értékeire nincs az alábbi egyenletrendszernek megoldása? Pontosan egy megoldása? Végtelen sok megoldása?

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 3 \\ 2x & - & 2y & = & k \end{array}$$

4.2 Gauss-Jordan módszerrel oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a.) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}$$

b.) $$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -15 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ 11x_1 & + & 7x_2 & & & = & -29 \end{array}$$

c.) $$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

4.3 Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket!

a.) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

b.) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 6y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 0 \end{array}$$

4.4 λ mely értéke mellett van az alábbi egyenletrendszernek nemtriviális megoldása?

$$\begin{array}{rcrcl} (\lambda-3)x & + & y & = & 0 \\ x & + & (\lambda-3)y & = & 0 \end{array}$$

4.5 Az a mely értékei mellett van az alábbi rendszernek pontosan egy megoldása? Végtelen sok megoldása? Nincs megoldása?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}$$

5. Mátrixok algebrája

5.1 Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Végezzük el az alábbi mátrix-mûveleteket! (Persze, ha lehetségesek.)

a.) $D + E$

b.) $D - E$

c.) $3D + 5E$

d.) DE

e.) ED

f.) $3C - D$

g.) $(AB)C$

h.) $A(BC)$

i.) $BA^T - C^T$

j.) $D^T E^T - (ED)^T$

5.2 Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Határozza meg

a.) $\underline{\underline{AC}}$

b.) $\underline{\underline{BC}}$

c.) $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}$ mátrixokat!

5.3 Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Határozza meg az

a.) $\underline{\underline{A}}^2$;

b.) $\underline{\underline{A}}^{2009}$;

c.) $\underline{\underline{A}}^{-1}$;

d.) $\underline{\underline{A}}^{-2009}$ mátrixokat.

(Tipp: alkalmazzunk trigonometrikus azonosságokat, VAGY értsük meg, hogy mit jelent ez a mátrix mint lineáris transzformáció.)

5.4 Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozza meg az

a.) $\underline{\underline{A}}^2$;

b.) $\underline{\underline{A}}^{2009}$;

c.) $\underline{\underline{A}}^{-1}$;

d.) $\underline{\underline{A}}^{-2009}$ mátrixokat.

(Tipp: számoljuk ki $\underline{\underline{A}}^2$-et, $\underline{\underline{A}}^3$-öt és $\underline{\underline{A}}^4$-t: onnan látszani fog.)

5.5 Elemi sorműveletek segítségével határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét.

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

b.) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.6 Oldjuk meg az alábbi rendszereket az $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$ képletet felhasználval.

a.) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & -3 \end{array}$

b.) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & b_2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_3 \end{array}$

5.7 Gauss-eliminációval határozzuk meg a determinánsokat!

a.) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

b.) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

c.) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

d.) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

e.) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

f.) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5.8 A k mely értékei esetén lesz az alábii mátrix invertálható?

a.) $\begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}$

b.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$

6. Sajátérték, sajátvektor

6.1 Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

a.) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b.) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c.) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

d.) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

e.) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

f.) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.2 Határozza meg az alábbi márixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

a.) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b.) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

c.) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

d.) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

e.) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

f.) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

6.3 Döntsük el, hogy az A diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt az P mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $P^{-1}AP$-t; adjuk meg A^{10} mátrixot!

a.) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$

b.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

c.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d.) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e.) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

f.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6.4 Legyen a $T : R^3 \to R^3$ lineáris transzformáció az alábbi módon adott:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & & -x_3 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 \end{bmatrix}$$

Határozzunk meg R^3-nak egy olyan bázisát, amelyben T mátrixsza diagonális!

6.5 Keressük meg azt az ortogonális P mátrixot, amely a szimmetrikus A mátrixot diagonalizálja és írjuk fel a D diagonális mátrixot!

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b.) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

c.) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

d.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Fourier sorok

7.1. Képletek

7.1.1. Komplex Fourier sor 2π szerint periodikus függvényekre

Egy 2π szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény komplex Fourier sora

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx},$$

ahol minden $k \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$-re az a_k (komplex) **szám**

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_A f(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x,$$

az A integrálási tartomány pedig a függvény bármelyik periódusa lehet – tehát $\int\limits_A$ lehet pl. $\int\limits_0^{2\pi}$ vagy $\int\limits_{-\pi}^{\pi}$.

Megjegyzés: Ezt úgy is lehet mondani, hogy $\mathcal{F}_f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_k(x)$, ahol $u_k(x) = e^{ikx}$ a k -adik bázisvektor (egy függvényekből álló vektortérben) és $a_k = \frac{1}{2\pi}\langle f, u_k\rangle$, két függvény skalárszorzata pedig úgy értendő, hogy $\langle f, g\rangle := \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x$. (Itt $\overline{g(x)}$ a $g(x)$ komplex konjugáltját jelenti.) Az $\frac{1}{2\pi}$ szorzó azért kell, mert az u_k függvényekből álló bázis ortogonális ugyan, de nem *ortonormált: az u_k mint vektor hossz-négyzete* $\langle u_k, u_k\rangle = \int\limits_0^{2\pi} u_k(x)\overline{u_k(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi.$

7.1.2. Valós Fourier sor 2π szerint periodikus függvényekre

Egy 2π szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény valós Fourier sora

$$\mathcal{F}_f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],$$

ahol az a_k és b_k (valós) **számok**

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_A f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(az } f \text{ függvény átlaga)},\\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_A f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x && (k = 1, 2, \dots),\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_A f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x && (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

az A integrálási tartomány pedig a függvény bármelyik periódusa lehet – tehát $\int\limits_A$ lehet pl. $\int\limits_0^{2\pi}$ vagy $\int\limits_{-\pi}^{\pi}$.

7.1.3. Ugyanez általában (bónusz)

A dolog akkor is működik, ha az f függvény nem (feltétlenül) 2π szerint periodikus, hanem bármilyen $L > 0$ szám szerint – bár ez az eset órán nem szerepelt. Ekkor a képletek egy kicsit módosulnak (csúnyábbak lesznek):

komplex eset

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\frac{2\pi}{L}x},$$

ahol $a_k = \frac{1}{L}\int\limits_0^L f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{L}x}\,\mathrm{d}x$.

valós eset

$$\mathcal{F}_f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\right],$$

ahol az a_k és b_k (valós) **számok**

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(az } f \text{ függvény átlaga)},$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

7.1.4. linearizáló formulák

- $e^{iz} = \cos z + i\sin z$
- $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, ezt könnyű hatványozni
- $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, ezt könnyű hatványozni
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

7.1.5. Mi köze $\mathcal{F}_f$-nek f-hez

Ha az f függvény elég szép és jó, akkor $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$, vagyis a Fourier sor előállítja a függvényt. Pontosabban:

1.) Ha f folytonos, akkor a Fourier sor (mint függvénysor) pontonként konvergens és f-hez tart.

2.) Ha f szakaszonként folytonos, a Fourier sor (mint függvénysor) pontonként konvergens és a határértéke

- ha f folytonos x-ben, akkor $f(x)$
- általában $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{y\nearrow x} f(y) + \lim\limits_{y\searrow x} f(y)\right)$, vagyis a két egyoldali határérték átlaga.

3.) Ha f négyzetesen integrálható, vagyis $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$, akkor a Fourier sor (mint függvénysor) konvergens és f-hez tart négyzetes integrál értelemben, vagyis ha $S_n(x)$ az n-edik részösszeg, akkor $\int\limits_0^{2\pi} |S_n(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

7.2. Feladatok

7.1 Keresse meg az alábbi 2π szerint periodikus $f(x)$ függvények komplex Fourier sorát illetve valós Fourier sorát..

a.)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha} \quad 0 \le x < \pi \\ 0, & \text{ha} \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

b.)

$$f(x) = |\sin x|$$

c.)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

d.)

$$f(x) = (\pi - |x|)^2, \qquad \text{ha } |x| < \pi$$

e.)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

7.2 Keresse meg az alábbi 2π szerint periodikus $f(x)$ függvények (valós vagy komplex) Fourier-sorát linearizáló formulák segítségével!

(a) $f(x) = \cos^2 x \sin x$

(b) $f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$

(c) $f(x) = \sin 5x(\sin 6x + \cos 3x)$

(d) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

7.3 a 2π szerint periodikus f függvény (komplex) Fourier sora

$$f(x) = 1 + 2e^{i3x} + 4e^{-i5x} + 6e^{i7x}.$$

a.) Mi lesz a $g(x) := f(x + \frac{\pi}{2})$ függvény Fourier sora?

b.) Mi lesz a $h(x) := f'(x)$ függvény Fourier sora?

7.4 a 2π szerint periodikus f függvény valós Fourier sora

$$f(x) = 1 + 2\cos x - 4\sin(3x) + 5\cos(6x).$$

a.) Mi lesz a $g(x) := f(x + \frac{\pi}{2})$ függvény Fourier sora?

b.) Mi lesz a $h(x) := f'(x)$ függvény Fourier sora?

7.5 Legyen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}$. Keressük meg $g(x) = f'(x)$ valós Fourier sorát!

8. Kétváltozós függvények differenciálszámítása

8.1 Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

(d) $f(x, y) = \log_y x$

8.2 Határozzuk meg az összes másodrendû parciális deriváltat!

(a) $f(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x$

(b) $f(x, y) = \ln(x + y)$

8.3 Írjuk fel az alábbi kétváltozós függvények lineáris approximációját az adott $r_0 = (x_0, y_0)$ pontok közelében (vagyis az f-et r_0 közelében legjobban közelítő elsőfokú polinomot.)

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $r_0 = (1, 1)$

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $r_0 = (0, 0)$

(c) $f(x, y) = xy + x + y$; $r_0 = (1, -1)$

8.4 Írjuk fel az alábbi térbeli felületek P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét (mondjuk $z = A(x - a) + B(y - b) + c$ alakban).

(a) $z = x^2 + y^2$; $P_0 = (1, 1, 2)$

(b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $P_0 = (0, 0, 2)$

(c) $z = xy + x + y$; $P_0 = (1, -1, -1)$

8.5 Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

(b) $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

8.6 Keressük meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény abszolút maximumát és minimumát az első síknegyedbe eső háromszög alakú tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ egyenesek határolnak.

9. Kétváltozós függvények integrálása

9.1 Számoljuk ki az $\iint\limits_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kettősintegrált az alábbi f függvények és T integrálási tartományok esetén. *Mindegyikhez készüljön rajz!*

a.) $f(x,y) = x^2y$, T pedig egy téglalap, aminek csúcsai $(1,1)$, $(1,4)$, $(3,4)$ és $(3,1)$.

b.) $f(x,y) = x^2y$, T pedig egy háromszög aminek csúcsai $(1,1)$, $(1,3)$ és $(3,3)$.

c.) $f(x,y) = x\sin(1+y^2)$, T pedig egy háromszög aminek csúcsai $(-1,0)$, $(0,2)$ és $(1,0)$.

d.) $f(x,y) = x$, T pedig egy háromszög aminek csúcsai $(0,0)$, $(1,2)$ és $(2,1)$.

e.) $f(x,y) = 2$, T pedig egy körcikk aminek középpontja $(0,0)$, sugara 2, nyílásszöge $45°$, egyenes oldalai a kört $(2,0)$-ban és $(\sqrt{2},\sqrt{2})$-ben metszik.

f.) $f(x,y) = e^{-(x+y)}2$, T pedig egy háromszög aminek csúcsai $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$.

9.2 Számoljuk ki az $\iint\limits_T 1+x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kettősintegrált, ahol T egy körcikk aminek középpontja $(0,0)$, sugara 2, nyílásszöge $45°$, egyenes oldalai a kört $(2,0)$-ban és $(\sqrt{2},\sqrt{2})$-ben metszik. *(Tipp: sokat segít egy polárkoordinátás helyettesítés – vagyis $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ [avagy $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$] és $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$.)*

9.3 Számoljuk ki annak a szobának a térfogatát, aminek padlója az x-y sík, alaprajza a $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,3)$, $(0,3)$ csúcsok által megadott téglalap, falai függőlegesek, de a teteje csálé: a $z = 3 - \frac{x^2+y^2}{100}$ egyenlet adja meg.

9.4 Számoljuk ki a $z = 1 - x^2 - y^2$ felület és az x-y sík által közbezárt test térfogatát!

10. Paraméterezett görbék ívhossza

10.1 Melyik görbét paraméterezzük? $(t \in \mathbb{R})$

(a) $\underline{r}(t) = (2+t, 3-2t, 4+t)$

(b) $\underline{r}(t) = (t, t^2, 3)$

(c) $\underline{r}(t) = (3\cos t, t, 3\sin t)$

(d) $\underline{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

10.2 Paraméterezzük egy

(a) y szimmetria-tengelyű 1 egység sugarú hengerre írt 2π menetemelkedésű csavarvonalat!

(b) y szimmetria-tengelyű 1 egység sugarú hengerre írt π menetemelkedésű csavarvonalat!

10.3 Adja meg az alábbi görbék érintőjét:

(a) $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$

(b) $\underline{r}(t) = (\sqrt{1-t^2}, t, t)$, $t_0 = 0,6$

(c) $\underline{r}(t) = (t, 2t^2, t-1)$, $t_0 = 3$

10.4 Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

(a) $\underline{r}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(b) $\underline{r}(t) = (4+2t, 3-t, -1+t)$, $0 \le t \le 3$

(c) $\underline{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $0 \le t \le \ln 2$

(d) $\underline{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$, $0 \le t \le 2$

(e) $\underline{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $0 \le t \le 1$

11. Néhány legeslegegyszerűbb differenciál-egyenlet

11.1 Az alábbi differenciálegyenletek közül mindegyikről döntsük el, hogy szétválasztható változójú-e vagy sem. Amelyik szétválasztható változójú, azt oldjuk meg! (A többit is megpróbálhatjuk, de azok nehezek is lehetnek.)

a.) $y'(t) + 2y(t) = 0$

b.) $y'(t) + 2y(t) = 1$

c.) $y'(t) + 2ty(t) = 0$

d.) $y'(t) + 2ty(t) = 1$

e.) $y''(t) + 2ty(t) = 0$

11.2 Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémákat:

a.) $2ty'(t) = 3y(t)$, $y(1) = 2$

b.) $(t+1)y'(t) = (1-y(t))^2$, $y(0) = 0$

c.) $(t+1)y'(t) = (1-y(t))^2$, $y(0) = 1$

11.3 Az alábbi differenciálegyenletek közül mindegyikről döntsük el, hogy elsőrendű lineáris egyenlet-e vagy sem. Amelyik elsőrendű lineáris, azt oldjuk meg! (A többit is megpróbálhatjuk, de azok nehezek is lehetnek.)

a.) $y''(t) + 2ty(t) + t^2 = 0$

b.) $y'(t) + 2y(t) = 0$

c.) $y'(t) = -2ty(t)$

d.) $y'(t) + 2ty(t) + t = 0$

e.) $y'(t) + 2y^2(t) + t = 0$

11.4 Oldjuk meg az $ty'(t) + y(t) = te^t$, $y(1) = 1$ kezdeti érték problémát!

11.5 Az alábbi differenciálegyenletek közül mindegyikről döntsük el, hogy homogén állandó együtthatós lineáris egyenlet-e vagy sem. Amelyik homogén állandó együtthatós lineáris egyenlet, azt oldjuk meg! (A többit is megpróbálhatjuk, de azok nehezek is lehetnek.)

a.) $y''(t) + 2y(t) = 0$

b.) $y''(t) - 2y(t) = 0$

c.) $y''(t) + 2y(t) = \sin(t)$

d.) $y''(t) + 2\sin(t)y(t) = 0$

e.) $y''(t) = 1 + y(t)$

f.) $y''(t) = y'(t) + y(t)$

g.) $y''(t) = 6y'(t) - 10y(t)$

11.6 Oldjuk meg az $y''(t) = -4y'(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ kezdeti érték problémát!