(1) Mivel $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, ezért

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(3x) = \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} + \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \qquad \frac{1}{i} = -i$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} e^{i(-3)x} + \frac{i}{2} e^{i(-2)x} + \frac{-i}{2} e^{i2x} + \frac{1}{2} e^{i3x}}$$, ami egy

komplex Fourier sori

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$$, ahol

k	-3	-2	2	3
a_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{-i}{2}$	$\frac{1}{2}$

és a többi $a_k = 0$

② (x,y) akkor stacionárius hely, ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$,

vagyis

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 := 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy - 6 := 0 \end{cases}$$ amiből $$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = -1 \end{cases}$$

$x^2 = y^2 \Longrightarrow x = y$ ~~vagy~~ vagy $x = -y$

ekkor $x^2 = -1$ ellentmondás

ekkor $x(-x) = -1$ vagyis $x^2 = 1$

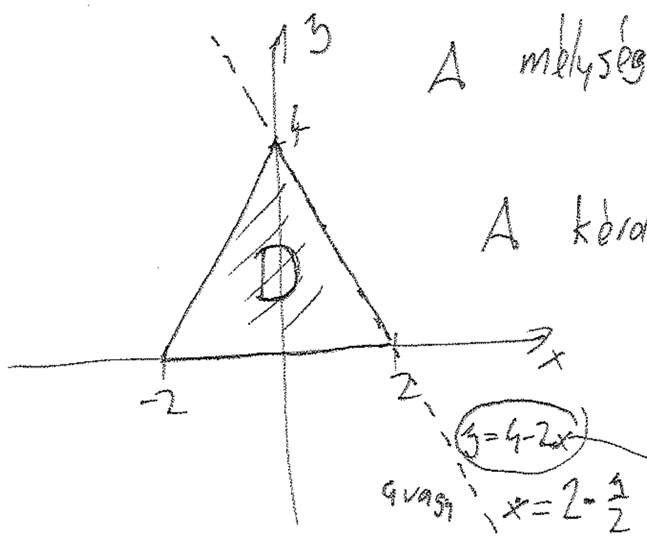
$\boxed{\begin{matrix} x = -1 \\ y = +1 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x = +1 \\ y = -1 \end{matrix}}$

Vagyis két stacionárius hely van:

$$\boxed{(x,y) = (-1, 1) \quad \text{illetve} \quad (x,y) = (1, -1)}$$

③ A medence alaprajza:

A mélység $f(x,y) = 2 - \frac{x^2+y}{5}$.

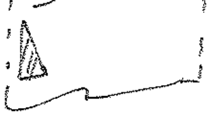


A kérdés a térfogat: $V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Mivel a medence szimmetrikus az y tengelyre (az alaprajz szimmetrikus és f is páros x-ben), elég a fele felett kiszámolni

!!!

$$V = 2\iint 2 - \frac{x^2+y}{5}\,dx\,dx = \underbrace{2\iint 2\,dx\,dy}_{2\cdot\text{Terület}(\Delta) = 2\cdot\frac{4\cdot 2}{2} = 8} - \frac{2}{5}\int_0^2\int_0^{4-2x} x^2+y\,dy\,dx =$$



$$= 2\cdot 8 - \frac{2}{5}\int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{4-2x} dx = 16 - \frac{2}{5}\int_0^2 \underbrace{x^2(4-2x)}_{4x^2-2x^3} + \underbrace{\frac{(4-2x)^2}{2}}_{\frac{4x^2-16x+16}{2} = 2x^2-8x+8} dx =$$

$$= 16 - \frac{2}{5}\int_0^2 -2x^3+6x^2-8x+8\,dx = 16 - \frac{2}{5}\left[-2\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 8x\right]_0^2 =$$

$$= 16 - \frac{2}{5}\left[-2\cdot\frac{2^4}{4} + 2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 + 8\cdot 2\right] = 16 - \frac{2}{5}\left[-8+16-16+16\right] = 16 - \frac{2}{5}\cdot 8 =$$

$$\cancel{= 8 - \frac{16}{5}} = 16 - \frac{16}{5} = 16 - 3.2 = \underline{\underline{12.8}} \quad (m^3)$$

④ $\underline{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$

$\dot{\underline{r}}(t) = (1, -\sin t, 2 \sin t \cos t)$ $\qquad r(0) = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ az érintő vektor $\dot{\underline{r}}(0) = (1, 0, 0)$

az érintő egyenes a $(0, 1, 0)$ ponton átmenő $(1, 0, 0)$

irányvektorú egyenes.

Paraméteresen $\underline{e(t)} = (0 + t\cdot 1, 1 + t\cdot 0, 0 + t\cdot 0) = \underline{(t, 1, 0)}$

avagy: ez éppen az $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ egyenes.

(5) Az általános megoldás szerencsére meg van adva:

kezdeti feltétel

$$z(t) = e^{-2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) \longrightarrow z(0) = A := 1$$

$$\Downarrow$$

$$z'(t) = -2e^{-2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + e^{-2t}(-3A\sin(3t) + 3B\cos(3t))$$

$$\Downarrow$$

$$z'(0) = -2A + 3B := -2$$

kezdeti feltétel

vagyis
$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + 3B = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A = 1 \\ B = 0 \end{matrix}}$$

A kezdeti érték probléma megoldása

$$\boxed{z(t) = e^{-2t}\cos(3t)}$$