① Mivel $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, ezért

$$e^{-i2x} = \cos(-2x) + i\sin(-2x) \underset{\sin x \text{ páratlan}}{\overset{\cos x \text{ páros}}{=\!=\!=}} \cos(2x) - i\sin(2x)$$

és

$$e^{i2x} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-3+4i}{4}\left(\cos(2x) - i\sin(2x)\right) + \frac{-3-4i}{4}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right) =$$

$$= \cos(2x)\underbrace{\left[\frac{-3+4i}{4} + \frac{-3-4i}{4}\right]}_{-\frac{3}{2}} + i\sin(2x)\underbrace{\left[\frac{-3-4i}{4} - \frac{-3+4i}{4}\right]}_{-2i} \overset{i^2=-1}{=\!=}$$

$$\boxed{= -\frac{3}{2}\cos(2x) + 2\sin(2x)}$$, és ezen már látszik, hogy valós.

(2) $f(x,y) = (2x+3y)e^{4x+5y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{4x+5y} + (2x+3y)e^{4x+5y}\cdot 4 = e^{4x+5y}\left[8x+12y+2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{4x+5y} + (2x+3y)e^{4x+5y}\cdot 5 = e^{4x+5y}\left[10x+15y+3\right]$$

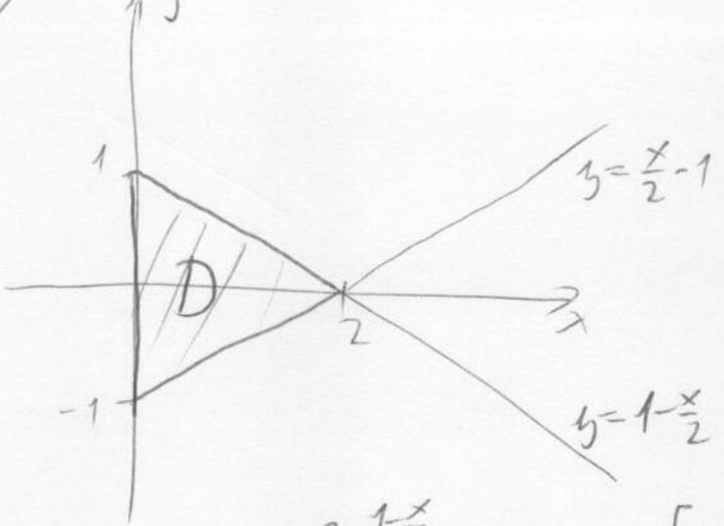
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = e^{4x+5y}\cdot 5\cdot\left[8x+12y+2\right] + e^{4x+5y}\cdot 12 =$$

$$= e^{4x+5y}\left[40x+60y+10+12\right]$$

és persze $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{4x+5y}\left[40x+60y+22\right]$

Young tétele miatt.

③



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}-1}^{1-\frac{x}{2}} x+y\,dy = \int_0^2 \left[\underbrace{\int_{\frac{x}{2}-1}^{1-\frac{x}{2}} x\,dy}_{\text{konstans határozott integrálja}} + \overbrace{\int_{\frac{x}{2}-1}^{1-\frac{x}{2}} y\,dy}^{\text{páratlan fv. integrálja 0 körüli szimmetrikus intervallumon } = 0} \right] dx =$$

$$x \cdot \left[\left(1-\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}-1\right)\right] = x(2-x)$$

$$= \int_0^2 x(2-x) + 0\,dx = \int_0^2 2x-x^2\,dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4-\frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

④ $r(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t, \cos(2t))$

$$\Rightarrow \dot r(t) = (2\sin t\cos t, -2\cos t\sin t, -2\sin(2t)) =$$

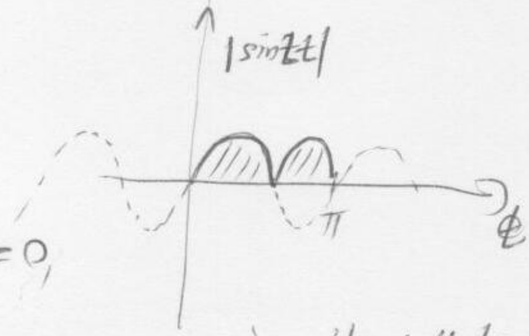
$$= (\sin(2t), -\sin(2t), -2\sin(2t))$$

$$\Rightarrow |\dot r(t)| = \sqrt{(\sin(2t))^2 + (-\sin(2t))^2 + (-2\sin(2t))^2} =$$

$$= \sqrt{6\sin^2(2t)} = \sqrt6\,|\sin(2t)|$$

$\Longrightarrow$ a megtett út, vagyis az ívhossz

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt6\,|\sin(2t)|\,dt$$



Ha $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin(2t) \ge 0$,

de ha $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, akkor $\sin(2t) < 0 \Rightarrow$ éppen kell lennie:

pl. szimmetria által

$$S = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt6 \sin(2t)\,dt = 2\sqrt6\left[\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \sqrt6\Big[\underbrace{-\cos\pi}_{1} + \underbrace{\cos 0}_{1}\Big]$$

$$= \boxed{2\sqrt6}$$

(5) $(1+t^2)y' = y^2 \qquad / \div (1+t^2)$

$$y' = \frac{y^2}{1+t^2} = \left(\frac{1}{1+t^2}\right) \cdot y^2$$ szétválasztható

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}\, y^2$$

osztunk y^2-tel **VAGY** megnéztük, hogy mi van, ha $y \equiv 0$

és örömmel látjuk, hogy $\boxed{y \equiv 0 \text{ megoldás}}$ és ráadásul

eleget tesz a kezdeti feltételnek

$(y(0)=0) \Rightarrow$ $\boxed{\text{EZT KERESTÜK}}$

ezt pedig nem

kell megcsinálni.