Függvénysorok – ~~Taylor so~~ hatványsorok, Taylor sorfejtés

Azt már tudjuk, hogy mit jelent az $a_1+a_2+a_3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen összeg, ha $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ számok. (Ez a numerikus sor = számsor.)

Mi van, ha $f_1, f_2, f_3, \ldots : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények, és össze akarjuk adni mind a ∞ sokat? Mit jelent a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$?

① Persze: Jelentse $g=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ most is azt, hogy ha

N nagy, akkor $F_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ véges részletösszeg

közel van g-hez, avagy $F_N=\sum_{n=1}^{N} f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$.

② Jó, jó, de mit jelent, hogy két függvény „közel van" egymáshoz? Mi az, hogy $F_n \to g$?

Erre többféle helyes választ is lehet. Pl. Az $F_n \to g$ jelenthet pl.

a.) pontonkénti konvergenciát: minden $x\in\mathbb{R}$-re $F_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} g(x)$

[Figyelem! Ez így már egy számsorozat konvergenciája, azt meg már értjük (remélem).]

b.) <u>egyenletes</u> konvergenciát: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x)-g(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

[Ez megint egy számsorozat konvergenciája]

c.) <u>integrálban</u> való konvergenciát: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_n(x)-g(x)|\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Ezek mind <u>értelmes</u>, <u>hasznos</u> és <u>KÜLÖNBÖZŐ</u> konvergenciafogalmak. Pl. ha $F_n(x)=\frac{1}{nx}$ (ahol $x\neq 0$), akkor

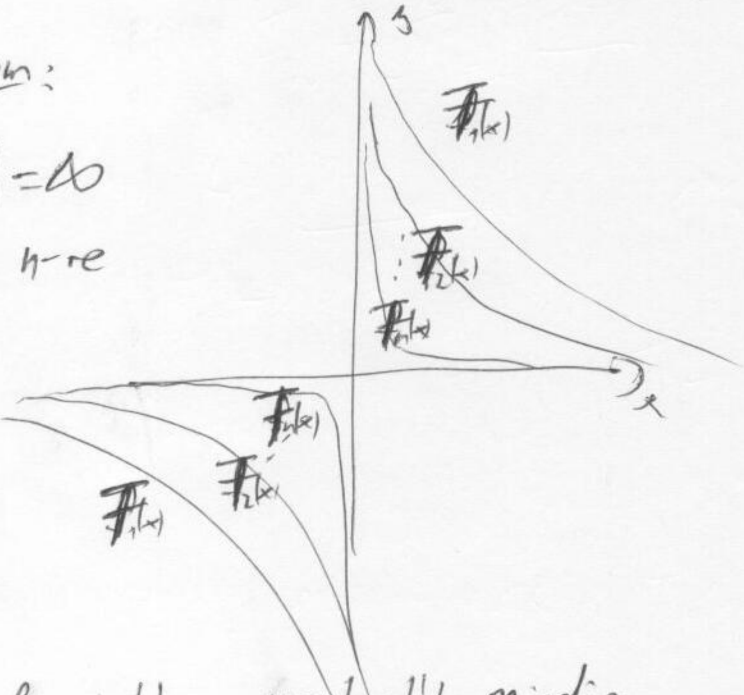
$F_n(x)\longrightarrow 0$ pontonként, de egyenletesen <u>nem</u>,

és integrálban <u>sem</u>:

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{nx}-0\right| = \infty$ minden n-re

és

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{nx}-0\right| = \infty$ szintén.



<u>FONTOS</u>: Ebben a fejezetben mostantól mindig PONTONKÉNTI konvergenciát használunk.

[Később majd egyszer szóba kerül egy integrálban való konvergencia is.]

<u>Pl:</u> Legyen $f_n(x) = x^n$ ~~vagyis~~ $(n = 0,1,2,\ldots)$, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .$$

<u>Buta kérdés:</u> Ez konvergens-e vagy sem?

<u>Válasz:</u> <u>Attól függ</u>, hogy melyik x-re.

Pl. $x = 0$-ra $1 + 0 + 0 + \ldots = 1$ konvergens

$x = 2$-re $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ divergens. Ezért hát

<u>Jó kérdés:</u> <u>Melyik</u> x-ekre konvergens? avagy

Mi ennek a <u>függvénysor</u>nak a $\boxed{\text{konvergencia-tartománya}}$?

Ezt persze tudjuk a „numerikus sorok" fejezetből:

Ez pont egy <u>mértani sor</u>, aminek a kvóciense $q = x$

$$\left[\text{avagy: } 1 + x + x^2 + \ldots \xrightarrow[\text{átjelölés}]{q := x} \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + \ldots}_{\text{így már remélem, ismerős.}}\right]$$

Tehát $\left.\begin{array}{l}\text{konvergens, ha } |x| < 1 \\ \text{divergens, ha } |x| \geq 1.\end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Vagyis a } \underline{\text{konvergencia-}} \text{ tartomány } D = (-1,1)}$

A D-beli x-ekre értelmes a ~~sz~~ függvénysor $\boxed{\text{összegéről}}$ beszélni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{most ez is egy \underline{függvény}.}} \quad (\text{ha } x \in (-1,1)).$$

Hatványsorok

Def: Legyen $a_0, a_1, a_2 \ldots$ számsorozat. Az a_n sorozattal mint együtthatókkal képzett nulla körüli hatványsor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad \text{függvénysor}$$

(olyan, mint egy végtelen hosszú polinom).

Ha $x_0 \in \mathbb{R}$, akkor az a_n együtthatókkal képzett x_0 körüli hatványsor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots \quad \text{függvénysor.}$$

A hatványsorok az elképzelhető legegyszerűbb függvénysorok. Nagyon hasznosak és nagyon szépek:

Tétel (1) Egy x_0 körüli hatványsor konvergencia-tartománya mindig intervallum, és pedig x_0 körüli szimmetrikus: $D = (x_0 - r, x_0 + r)$ ahol r a „konvergenciasugár".

(Esetleg tartalmazhatja egyik vagy mindkét végpontot: lehet $[x_0 - r, x_0 + r)$ vagy $(x_0 - r, x_0 + r]$ vagy $[x_0 - r, x_0 + r]$)

Az r konvergencia-sugár lehet $r = 0$ vagy $r = \infty$ is – vagyis előfordulhat, hogy $D = \{x_0\}$ (sehol másutt nem konvergens) vagy $D = \mathbb{R}$ (mindenütt konvergens).

[Megj: Ennek bizonyítása könnyen kijön az összehasonlító kritériumból.]

(2) Ráadásul az r konvergencia-sugár kiszámolható az a_n együtthatók ismeretében — a képlettől megkímélem az olvasót.

(3) Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\boxed{\text{összegfüggvény nagyon szép:}}$

a.) a konvergencia-tartomány egészén folytonos, sőt

b.) a konvergencia-tartomány belsejében deriválható, ~~sőt~~ sőt

c.) —— " —— akárhányszor deriválható, sőt

d.) lehet f (akárhányszor) $\boxed{\text{tagonként deriválni}}$:

$$\text{ha} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots ,$$

$$\text{akkor} \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Köv.: Ha az $f(x)$ összegfüggvényt ismerjük, akkor az a_n sorozat rekonstruálható:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \Rightarrow f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \Rightarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 4\cdot 3 a_4 x^2 + \dots \Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 4\cdot 3\cdot 2 a_4 x + \dots \Rightarrow f'''(0) = 6a_3$$

$$f''''(x) = 4\cdot 3\cdot 2 a_4 + \dots \Rightarrow f''''(0) = 4!\, a_4$$

$\vdots$ stb $\qquad\qquad \vdots$

$$f^{(k)}(x) = k!\, a_k + \dots \Rightarrow f^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

jelölés az f k-adik deriváltjára $\qquad$ ~~Vagyis~~ Vagyis

Tétel Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$,

illetve $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$

Általában, ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, akkor $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$,

illetve $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2 \dots$

[Itt $k=0$ is lehet: a „nulladik derivált" az f függvény maga.]

Nagyen szeretjük az olyan függvényeket, akik egy hatványsor összegeként előállnak: nevük is van:

Def: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény analitikus, ha előáll $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ alakban.

[Pontosabban: elég, ha f az x_0 egy környezetében előáll ilyen alakban, és a ~~hivat~~ hivatalos kifejezés „analitikus x_0-ban".]

Jó hír: nagyon sok analitikus függvény van.

[Avagy: minden épeszű függvény analitikus.]

Pontosabban: • minden elemi függvény analitikus (az értelmezési tartomány belsejében)

→ polinomok: $1, x, x^2, x^3, \ldots$

→ hatványfüggvények: $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, x^{4/3}, \ldots$

→ exponenciális fv-ek: $e^x, 10^x, \ldots$

→ logaritmus: $\log x$, $\ln x$

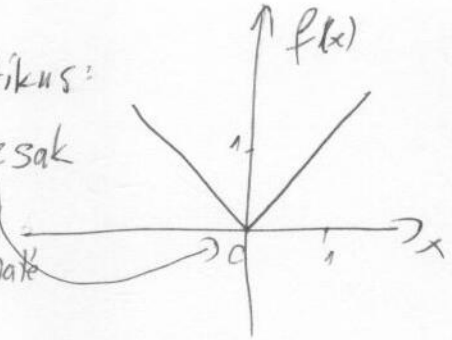
→ szögfüggvények: $\sin, \cos, \tan, \ldots$

• analitikus függvények összege; különbsége; szorzata; hányadosa; számszorosa; kompozíciója is analitikus, pl

$$\ln\left(\sin\left(\frac{x-\cos x}{e^x} \cdot 3\right)+1\right)$$ is analitikus

Jó észben tartani: $f(x)=|x|$ az $\underline{x_0=0\text{-ban NEM}}$

analitikus: még csak nem is deriválható



(de mindenütt máshol igen)

$\underline{\text{Pl. 1:}}$ Ha $f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor mi lehet $a_0, a_1, a_2, \ldots$?

Válasz: az előző tételből tudjuk, hogy $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, így nincs más teendő, mint $f(x)$-et végtelen sokszor lederiválni.

Szerencsére ez könnyű:

$$
\begin{array}{lll}
f(x)=e^x \Rightarrow & f(0)=e^0=1 \Rightarrow & a_0=\frac{1}{0!}=1 \\
f'(x)=e^x & f'(0)=e^0=1 & a_1=\frac{1}{1!}=1 \\
f''(x)=e^x & f''(0)=e^0=1 & a_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x)=e^x & f^{(n)}(0)=e^0=1 & a_n=\frac{1}{n!}
\end{array}
$$

Fontos!! Az a_n NEM az f n-edik deriváltja (osztva $n!$-sal), hanem ennek a 0-beli helyettesítési értéke, vagyis

$\boxed{a_n \text{ egy SZÁM}}$

$\underline{\text{Köv:}}$ $\boxed{f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots}$

Ez minden hatványsorok legfontosabbika.

Pl. 2: Ha $f(x)=\sin x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f(0)=\sin 0=0 \Rightarrow a_0=0/0!=0$$
$$f'(x)=\cos x \quad f'(0)=\cos 0=1 \quad a_1=\frac{1}{1!}=1$$
$$f''(x)=-\sin x \quad f''(0)=-\sin 0=0 \quad a_2=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \quad f'''(0)=-\cos 0=-1 \quad a_3=-\frac{1}{3!}$$
$$f''''(x)=\sin x \quad f''''(0)=\sin 0=0 \quad a_4=0$$

és innen periodikusan ismétlődik

Vagyis $f(x)=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\dots$

[Jééé, milyen érdekes! $\sin x$ hatványsorában pont ugyanolyan tagok szerepelnek, mint e^x hatványsorában, de csak minden második, és váltakozó előjellel. (Ez nem véletlen.)]

A „függvény ⟶ hatványsor" eljárás neve $\boxed{\text{Taylor sorfejtés}}$.

Def: • Egy f függvény nulla körüli Taylor sora (más néven McLaurin sora) a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor, ahol $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

• Általában, $x_0\in\mathbb{R}$ esetén az f függvény x_0 körüli Taylor sora a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor, ahol $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

[Ha f analitikus, az pont azt jelenti, hogy előállítja őt a Taylor sora.]

Újabb jó hír: A Taylor sorfejtéshez ~~sokszor~~ gyakran nem kell egy bonyolult függvényt ~~A~~ sokszor lederiválni — lehet ügyesebben is.

Pl. 1: $f(x) = \ln(1+x)$

$\Downarrow$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, de ez régi ismerős: $y := -x$ jelöléssol $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-y} \underset{\text{sor összege}}{\overset{\text{mértani}}{=\!=}} 1 + y + y^2 + y^3 + \dots =$

$$\underset{\substack{\text{még}\\ \text{mindig}}}{\overset{y=-x}{=\!=}} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

vagyis $f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

de hatványsort szabad tagonként deriválni

$\Downarrow$

$$f(x) = c + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

(aki nem hiszi, deriválja le)

valami konstans: az értéke kitalálható abból, hogy $f(0) = \ln(1+0) = 0$,

vagyis $\underline{c = 0}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots}$$

Pl. 2: $f(x) = \ln(1+x^2) \overset{y:=x^2}{=\!=} \ln(1+y) \overset{\text{előző}}{=\!=} y - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{y^5}{5} + \dots =$

$$\underset{\text{még mindig}}{\overset{y=x^2}{=\!=}} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \dots$$

Taylor sorfejtés alkalmatásai

Nagyon sok van, most 2-t említek:

(1) Ha a Taylor sorból csak véges sok tagot veszünk, a neve Taylor polinom, és sokszor nagyon jó közelítés $f(x)$-re. Főleg x_0-hoz közel már néhány tag is jó közelítést ad — lásd a gyakorlaton készült grafikonokat.

(2) $\frac{0}{0}$ típusú határértékek számolása a számláló és a nevező külön-külön sorfejtésével:

Pl: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)(1-\cos x)}{(x-\sin x)\ln(1+x)}$$ $\to 0$, $\to 0$

Ez nehéz, mert a számláló és a nevező is 0-hoz tart.

Viszont $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

$$\cos x \overset{HF}{=} \cancel{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}} \; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$\Rightarrow 1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \text{számláló} = \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{4!} + \ldots$$

$\approx \frac{x^4}{2}$, ha x kicsi

ugyanígy $$\text{nevező} = \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\right) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + \ldots$$

$\approx \frac{x^4}{6}$, ha x kicsi

$$\Rightarrow \frac{\sin(x^2)(1-\cos x)}{(x-\sin x)\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{4!} - \dots}{\frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + \dots} \xrightarrow{\text{egyszerűsítek } x^4\text{-nel}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots}{\frac{1}{6} - \frac{x}{12} + \dots} \to$$

$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots \to \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} - \frac{x}{12} + \dots \to \frac{1}{6}$

12

$$\xrightarrow{x\to 0} \frac{1/2}{1/6} = \underline{\underline{3}}$$

[Hihetőség-ellenőrzés: $x = 0{,}01$-re $\frac{\sin(x^2)(1-\cos x)}{(x-\sin x)\ln(1+x)} \underset{\text{lépés}}{\overset{\text{számo-}}{\approx}} 3.015$]