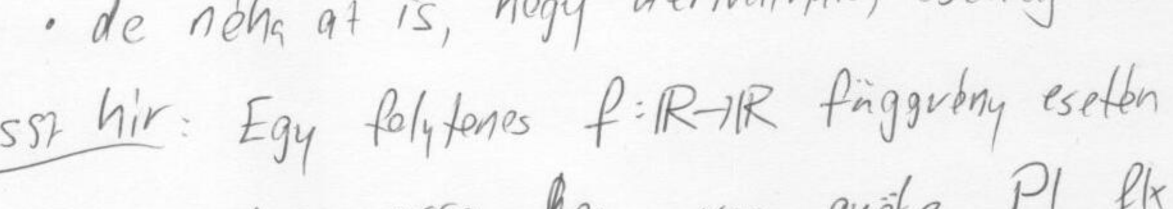
Gyökközelítési módszerek

Adott $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény. Cél az $f(x)=0$ egyenlet megoldásainak — vagy legalább 1 megoldásnak —, más néven az f gyökeinek megkeresése numerikusan, lehetőleg minél pontosabban, de minél kevesebb számolással.

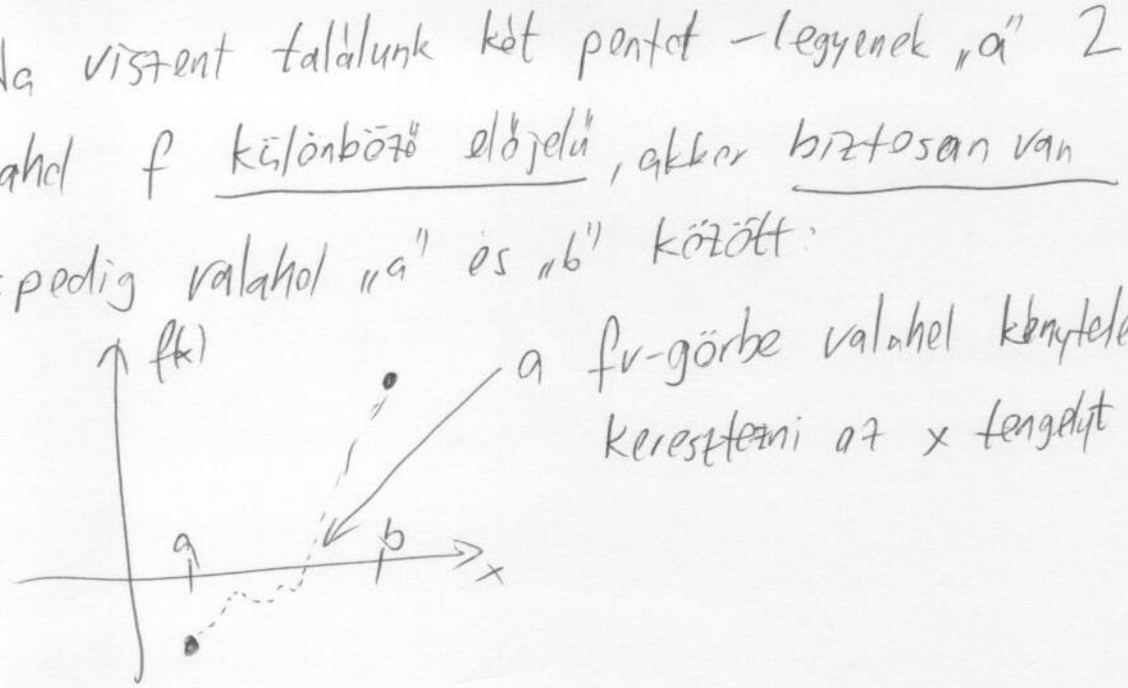
Ez általában — ha f-ről nem tudunk semmit, csak kiértékelni pl. egy számítógépes programmal — reménytelenül nehéz. Ezért feltevéseket teszünk f-re:

- mindig feltesszük, hogy f folytonos
- de néha azt is, hogy deriválható, esetleg többször is.

Rossz hír: Egy folytonos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény esetén semmi garancia nincs arra, hogy van gyöke. Pl. $f(x)=x^2+1$-nek nincs. Erről numerikusan sehogy nem lehet meggyőződni: pl. ha $f(x)$-et nagyon sok x-re kiszámoljuk, és mindig pozitívnak bizonyul, akkor gyanítható, hogy nincs gyöke, de biztosnak nem biztos. Pl:



Fő hír: Ha viszont találunk két pontot – legyenek „a" és „b", ahol f különböző előjelű, akkor biztosan van gyöke, éspedig valahol „a" és „b" között:



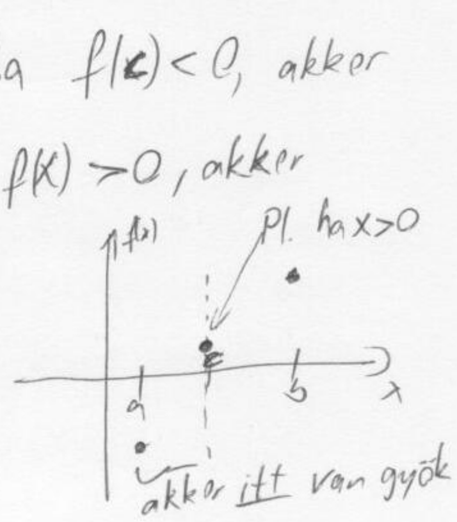
Precízebben:

Tétel (Bolzano tétele):
Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, valamint $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, akkor $\exists\, x \in [a,b]$, hogy $f(x) = 0$.

Fő hír 2: Ilyenkor nem csak, hogy van gyök, de meg is tudjuk találni. (Pontosabban: legalább 1-et meg tudunk találni.)

1. MÓDSZER: Intervallum-felezés

Tfh $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Osszuk kettő az $[a,b]$ intervallumot középen (vagyis $x = \frac{a+b}{2}$-ben). Ha $f(x) < 0$, akkor biztos van gyök $[x,b]$-ben; ha pedig $f(x) > 0$, akkor $[a,x]$-ben. Ha $f(x) = 0$, az még jobb: megtaláltuk a gyököt. (Pontosabban: egy gyököt.)



Ezt ismételgetve egyre rövidebb intervallumokat találunk, amiben biztos van gyök — határértékben 1 etlen pontot.

Formálisan:

- legyen $a_0 = a$, $b_0 = b$ olyan, hogy $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$
  (vagyis $f(a_0)$ és $f(b_0)$ különböző előjelű)

- Ezután minden $n \geq 0$-ra
  - → $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$; számoljuk ki $f(c_n)$-t.
  - → ha $f(c_n) = 0$, nyertünk, megvan a gyök
  - → ha $f(c_n)$ előjele $f(b_n)$-nel azonos, ~~akkor~~
    (vagy: $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$), akkor
    $$[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, c_n]$$
  - → egyébként $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [c_n, b_n]$

Tétel: $\exists\ x^* = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, és $f(x^*) = 0$.

Biz: ~~a_n monoton növekvő és korlátos~~ Tfh $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Az a_n sorozat monoton növekvő és felülről korlátos
$\xrightarrow[\text{számhalmaz}]{\text{ez a valós}}$ van határértéke: $x_a^* := \lim_{n\to\infty} a_n$ létezik.
kalcs-tulajdonsága

Ugyanígy b_n monoton csökkenő és alulról korlátos $\Rightarrow$ $x_b^* := \lim_{n\to\infty} b_n$ létezik.

Persze $|b_1-a_1|=\frac{|b_0-a_0|}{2}$; $|b_2-a_2|=\frac{|b_0-a_0|}{4}$; ... stb

$$|b_n-a_n|=\frac{|b_0-a_0|}{2^n}\longrightarrow 0\text{, ezért } x_a^*=x_b^*=:x^*$$

Állítom, hogy $f(x^*)=0$.

biz: $f(x^*)\overset{x^*\text{ def}}{=\!=}f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\xlongequal{\boxed{f\text{ folytonos}}}\lim_{n\to\infty}f(a_n)\le 0,$

vagyis felcserélhető a határértékkel

mert $f(a_n)<0$ minden n-re: negatív számok sorozatának határértéke nem lehet pozitív.

Ugyanígy $f(x^*)=\!=f\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)\xlongequal[\text{ség}]{\text{folytonos-}}\lim_{n\to\infty}\underbrace{f(b_n)}_{>0}\ge 0$

Vagyis $f(x^*)\le 0$ és $f(x^*)\ge 0\Rightarrow\boxed{f(x^*)=0}$

$\square$ bizonyítás kész

[Megj: Ez a bizonyítás egyúttal Bolzano tételének is a bizonyítása.]

Az intervallum-felező módszer

Előnye: • betonbiztos: mindig talál gyököt
• gyenge feltételek mellett működik: elég, ha f folytonos

Hátránya: lassú. No nem nagyon lassú:

$|x^*-a_n|\le|b_n-a_n|\le\frac{|b_0-a_0|}{2^n}\longrightarrow 0$ exponenciálisan gyorsan,
vagyis $a_n\to x^*$ exponenciálisan gyorsan, de mégis vannak sokkal gyorsabb módszerek.

Pl: ha $|b_0 - a_0| = 1$ és mi $\varepsilon = 10^{-6}$ pontosságra törekszünk (6 tizedesjegy), akkor az kell, hogy $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n} < 10^{-6}$ legyen, vagyis $\frac{1}{2^n} < 10^{-6}$ $\quad / \log_2 [\;]$

$$-n < -6 \log_2 10$$

$$n > 6 \log_2 10 \approx 6 \cdot 3.32 \approx 19.2$$

$\Rightarrow$ $n = 20$ lépésre van szükség.

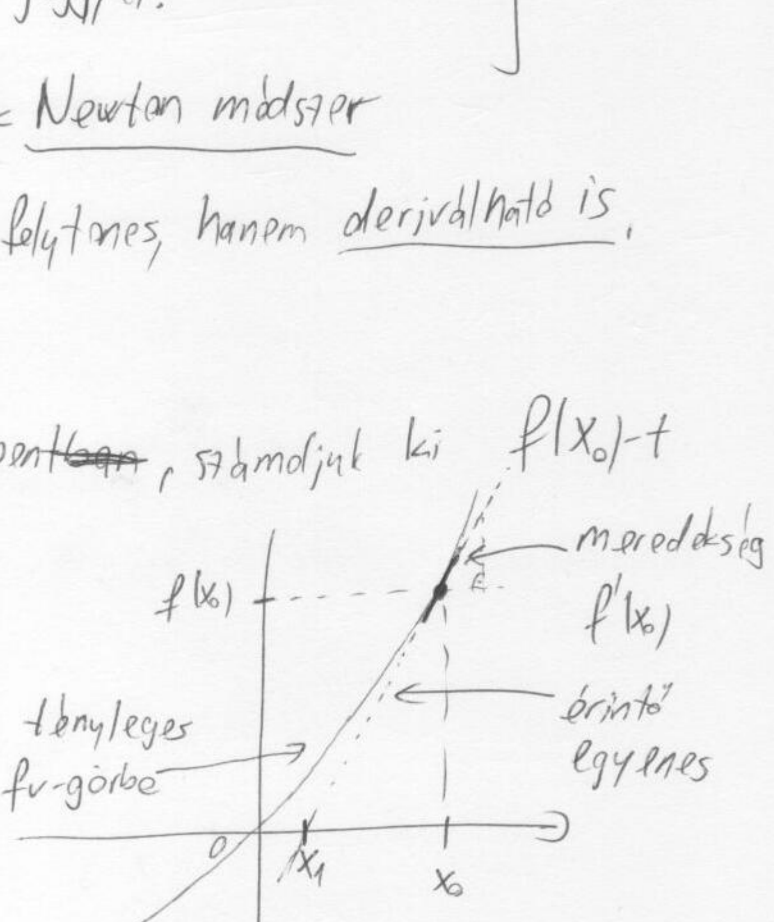
[Durván: a pontosság kb 3 lépésenként javul 1 tizedes jeggyel.]

$\boxed{\text{2. módszer}}$: érintő módszer = Newton módszer

Tfh $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem csak folytonos, hanem deriválható is, és használjuk is ki!

Ötlet: legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ kiinduló pont~~ban~~, számoljuk ki $f(x_0)$-t és $f'(x_0)$-t:

Ennyi infó alapján hova tippelnénk a legközelebbi gyököt?



Válasz: Oda, ahol az érintő metszi az x tengelyt, vagyis $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$-ba. Ha a meredekség állandó lenne, akkor pontosan itt lenne a gyök.

Általában persze a meredekség nem állandó, de egy gyök kis környezetében jó közelítéssel igen

$\Rightarrow$ remélhető, hogy x_1 jobb közelítés, mint x_0.

Ez alapján az eljárás:

- legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges (minél közelebb van a keresett gyökhöz, annál jobb)
- minden $n \geq 0$-ra $\boxed{x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$.

Def: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény x^* gyöke egyszeres vagy nemelfajult gyök, ha $f'(x^*) \neq 0$ (és persze $f(x^*) = 0$):

Vagyis x^*-nál a fv-görbe szögben metszi az x tengelyt (nem pedig érinti).

[Megj: Az ilyen gyököt sokkal könnyebb keresni, mint az elfajult gyököket: azoknak a közelében is nagyon kicsi a függvényérték.]

<u>Tétel</u>: Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvény és az $f'(x)$ derivált is folytonos, továbbá $x^*\in\mathbb{R}$ egy nemelfajult gyöke, és x_0 kellően közel van x^*-hoz, akkor $x_n\to x^*$, vagyis az érintő módszer megtalálja az x^* gyököt.

[<u>Megj</u>: a „kellően közel" azt jelenti, hogy van x^*-nak egy kis környezete, amin belül bárhol lehet x_0.]

További jó hír, hogy sok esetben a konvergencia <u>sokkal gyorsabb</u>, mint az intervallum-felező módszeré:

<u>Def</u>: Legyen $x_n\to x^*$ konvergens sorozat. Azt mondjuk, hogy a.) a konvergencia $\boxed{\text{rendje } 1}$ és sebessége $M\in(0,1)$,

$M<1!$

ha $\cancel{\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}} \approx M$ ~~nagy n-re~~ nagy n-re

$$\underbrace{|x_{n+1}-x^*|}_{\text{következő eltérés}} \approx M\underbrace{|x_n-x^*|}_{\text{előző eltérés.}}$$

$$\left[\text{Precízen: } \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=M\right]$$

b.) a konvergencia $\boxed{\text{rendje } q}>1$ és sebessége $M\in(0,\infty)$ (lehet 1-nél nagyobb is), ha

$$|x_{n+1}-x^*|\approx M|x_n-x^*|^q$$

$$\left[\text{Precízen: } \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^q}=M\right]$$

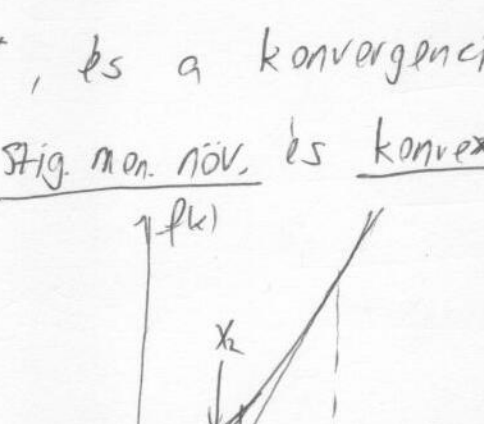
[Megj.: 1.) Ha pl. $q=2$, az sokkal gyorsabb konvergenciát jelent, mint az elsőrendű:
egy kicsi szám négyzete sokkal kisebb, mint ő maga. Pl $(10^{-6})^2 = 10^{-12}$

Így ($M=1$ esetén) ha az n-edik lépésben a ~~ka~~ pontosság 6 tizedesjegy, akkor az $(n+1)$-edikben már 12 tizedesjegy.

2.) A „sebesség" elnevezés megtévesztő: minél kisebb az M, annál gyorsabb a konvergencia.]

Tétel: Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható, ~~és~~ $x^* \in \mathbb{R}$ egy nem elfajult gyöke, és x_0 kellően közel van x^*-hoz, akkor az ~~húrmó~~ érintő módszert x_0-ból indítva $x_n \to x^*$, és a konvergencia másodrendű (legalább).

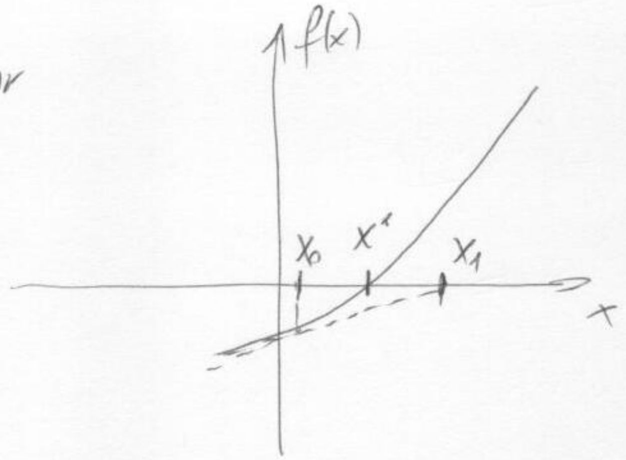
Pl: 1.) Ha f szig. mon. növ. és konvex és $x_0 > x^*$, akkor



$x^* < x_1 < x_0$, és ugyanígy $x^* < x_{n+1} < x_n$ minden n-re, így $x_n \searrow x^*$

2) Ha f szig. mon. növ. és konvex és $x_0 < x^*$,

akkor

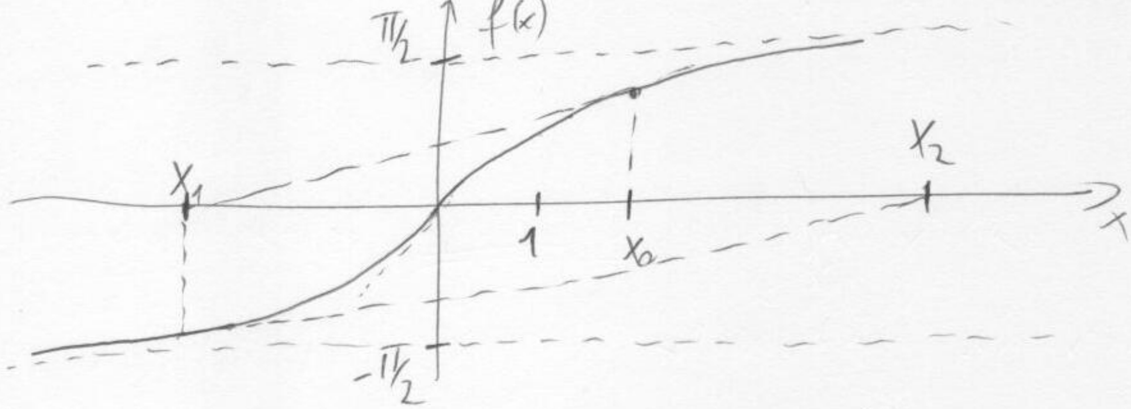


$x_1 > x_0$, vagyis az érintő módszer első lépése túllő a célon,

de utána az 1) pont miatt $x_n \searrow x_0$ szintén.

[Köv: szig. mon. és konvex (vagy konkáv) függvény gyökét a módszer bárhonnan indulva megtalálja.]

3.) Elrettentő példa: $f(x) = \arctan x$ (se nem konvex, se nem konkáv)

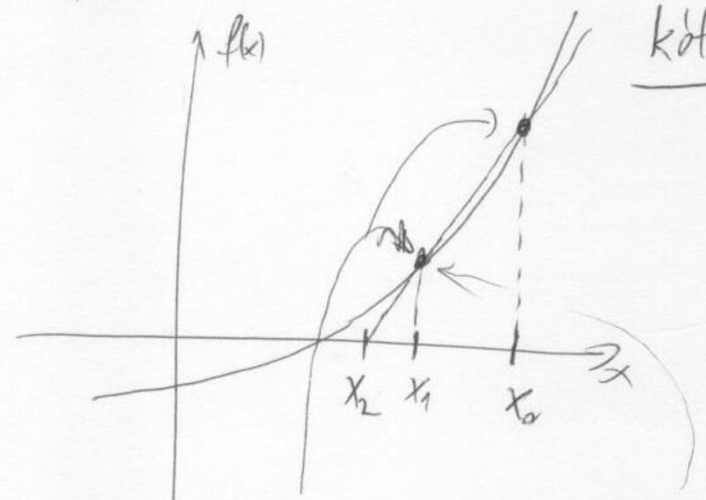


Ha $|x_0| > 1$, akkor x_n divergens (egyre nagyobb számok váltakozó előjellel).

Összegzés: A Newton módszer egyszerű és gyors. Fő hátránya, hogy $\boxed{\text{kell hozzá a derivált}}$. Márpedig előfordul, még ha f deriválható is, hogy a deriváltat nem ismerjük, vagy nehéz kiszámolni.

3. módszer: húrmódszer

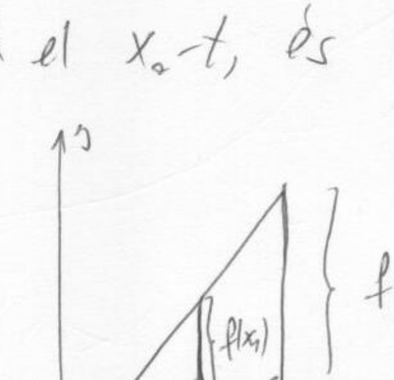
Ötlet: Ha a deriváltat nem ismerjük, érintő helyett használjunk szelőt:



két ponttal indulunk, x_0 és x_1.

- Rajzoljuk meg az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelőt. (Ha x_0 és x_1 közel van, akkor ez közel van egy érintőhöz)
- Legyen x_2 ennek a metszete az x tengellyel.
- Felejtsük el x_0-t, és folytassuk az (x_1, x_2) párral.

Számolás:



A két derékszögű háromszög hasonlóságából

$$\frac{x_0 - x_2}{f(x_0)} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1)}$$

Ebből x_2-t kifejezve $x_2 = \dfrac{f(x_1)\,x_0 - f(x_0)\,x_1}{f(x_1) - f(x_0)}$

Általában: $$\boxed{x_{n+2} := \frac{f(x_{n+1})\,x_n - f(x_n)\,x_{n+1}}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}}$$ a húrmódszer képlete.

Tétel: Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható, x^* egy nem elfajult gyöke és x_0, x_1 kellően közel van x^*-hoz, akkor a húrmódszer szerint $x_n \to x^*$, és a konvergencia rendje $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$

[**Megj:** Ez nagyon jó. Tfh $f(x)$ és $f'(x)$ kiszámolása kb. ugyanannyi munka, a többi osztás-szorzás elhanyagolható. Ekkor a húrmódszernek két lépése jön ki annyi munkával, mint a Newton módszer 1 lépése; Így nézve gyorsabb a Newton módszernél, mert

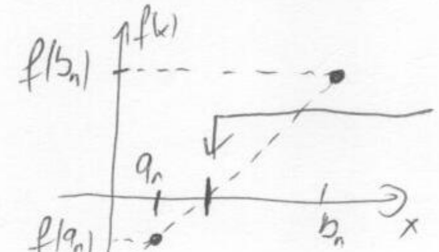
$$q^2 \approx 2.62 > 2$$
]

$\boxed{\text{4. módszer}}$: Regula Falsi $\approx$ hamis közelítés módszere

Kombináljuk az intervallum-felező módszert a húrmódszerrel:

mint az intervallum-felezésnél:

- minden lépésben lesz egy $[a_n, b_n]$ intervallumunk, ami garantáltan tartalmaz gyököt (mert $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$)
- minden lépésben kettévágjuk és az egyik részét tartjuk meg
- de NEM középen vágunk, hanem ott, ahol a húr-közelítéssel a gyököt „gyanítjuk" (innen az elnevezés):



itt fogunk vágni: az osztópont

$$c_n := \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$ $\boxed{\text{mint a húrmódszernél}}$

Összegezve:

- $[a_0, b_0]$ legyen olyan, hogy $f(a_0)\,f(b_0) < 0$ (vagyis különböző előjelűek).

- Minden $n \geq 0$-ra

$$\rightarrow \quad c_n := \frac{f(b_n)\,a_n - f(a_n)\,b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

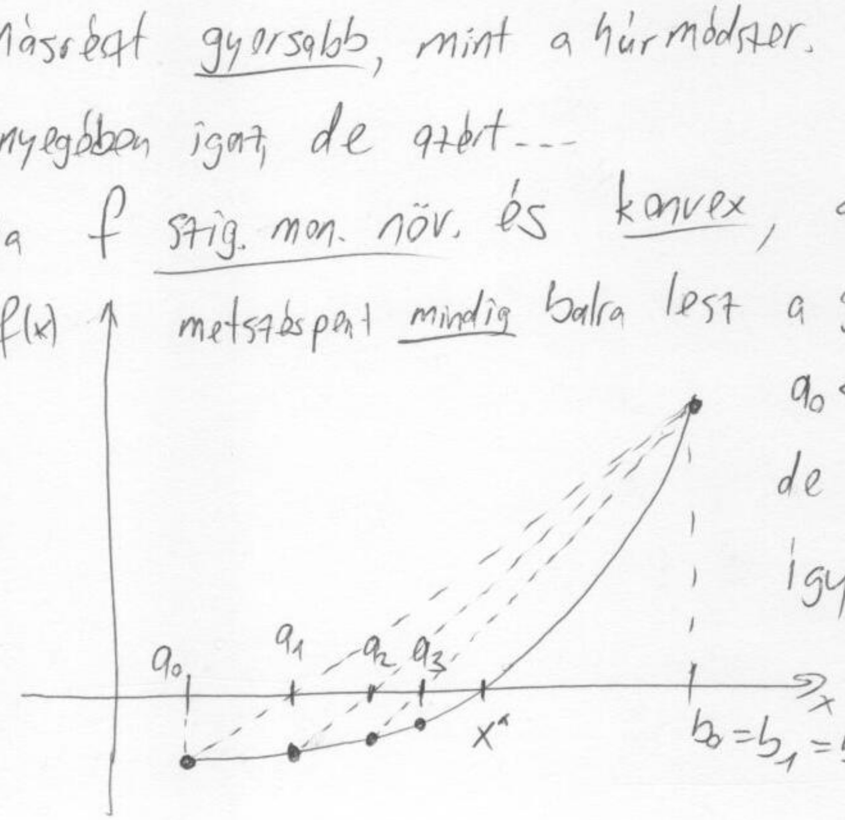
$$\rightarrow \text{ha } \begin{cases} f(c_n) = 0, & \text{akkor megvan a gyök, megállunk.} \\ f(c_n)\,f(a_n) < 0, & \text{akkor } [a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, c_n] \\ \text{egyébként} & [a_{n+1}, b_{n+1}] := [c_n, b_n] \end{cases}$$

<u>Remény:</u> Ez ~~egyrészt~~

- biztosan megtalálja a gyököt, mint az intervallumfelezés
- másrészt <u>gyorsabb</u>, mint a húrmódszer.

Ez lényegében igaz, de azért...

Pl: ha f <u>szig. mon. növ.</u> és <u>konvex</u>, akkor a metszéspont <u>mindig</u> balra lesz a gyöktől, vagyis



$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n$

de $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_n$,

így $\boxed{b_n \text{ nem csökken}}$, $|b_n - a_n| \not\to 0$.

Cserébe $a_n \nearrow x^*$, és tényleg sokkal gyorsabban, mint az intervallum-felezés esetén.

[Megj: A módszer további (bonyolult) finomításával elérhető, hogy az eljárás garantáltan megverje az intervallum-felezést + jól viselkedő fv-ekre ugyanolyan gyors legyen, mint a Newton módszer.]