Numerikus sorok = Számsorok

Cél: végtelen sok szám összegének értelmezése / kiszámolása

Szóhasználat: Legyenek $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{R}$ (valós számok).

Ezek felsorolását: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ úgy hívjuk, hogy sorozat

(végtelen hosszú)

(angolul: sequence)

[esetleg számsorozat, vagy numerikus sorozat]

Viszont az összegüket: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ úgy hívjuk, hogy $\boxed{\text{sor}}$

(végtelen ~~hossz~~ sok tagú)

(angolul: series)

[esetleg számsor vagy numerikus sor]

Jelölés: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

néha 1-től kényelmes számozni, néha 0-tól.

0. észrevétel: Nem nyilvánvaló, hogy ez értelmes: sőt, látni fogjuk, hogy bizonyos sorozatokra van értelme a végtelen összegnek, másokra nincs.

1. észrevétel: Bizony megeshet, hogy ∞ sok szám összege véges, még csupa pozitív számokkal is.

1. Iskolapélda Egy béka ugrál felfelé a ~~hegyre~~ dombra, és egyre fárad. Az 1. ugrása 1 méter

a 2. ugrása már csak $\frac{1}{2}$ méter

a 3. — // — $\frac{1}{4}$ —//—

a 4. — // — $\frac{1}{8}$ —//—

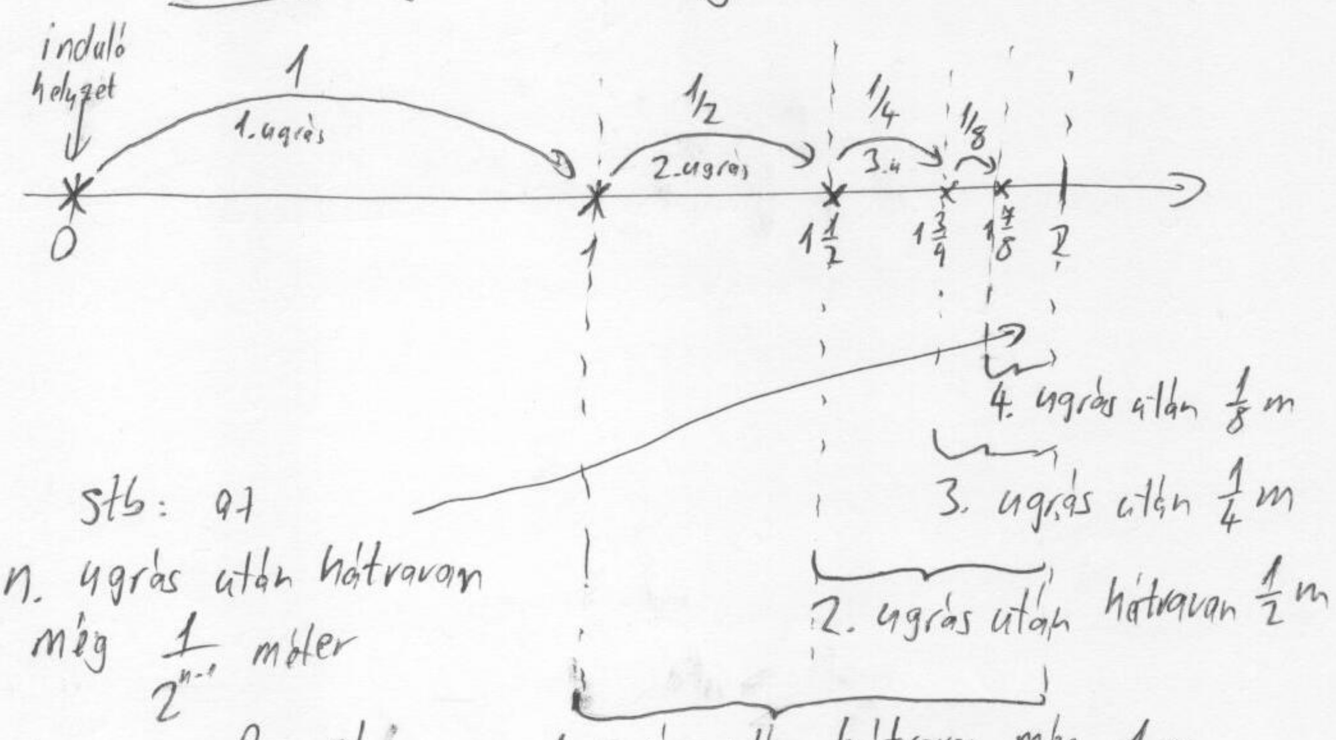
⋮

stb.: az n. ugrása $\frac{1}{2^{n-1}}$ (méter)

Milyen messzire jut el a béka, ha bőven van ideje?

Válasz: Hát éppen $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ méterre.

És ez — csodák csodája — VÉGES: könnyű látni, hogy a béka sose jut el 2 méterig:



stb.: az n. ugrás után hátravan még $\frac{1}{2^{n-1}}$ méter

$\Rightarrow$ sose fog el

Békánk ~~sose~~ jut el 2m-ig de ∞ sok ugrással végtelenül megközelíti, avagy $\boxed{\infty \text{ sok lépésben}}$ mégiscsak „eléri”.

semelyik véges lépésben nem

Ezt tükrözi a ~~...~~ leendő definíciók, amiből ki fog jönni, hogy $\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 2}$

Szóhasználat: Ha $a_1, a_2, a_3 \dots$ számsorozat,

$$S = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{a belőle alkotott } \underline{\text{sor}}$$

$$S_N = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_N}_{\text{véges sok tag}} = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{az } N\text{-edik } \underline{\text{részletösszeg}}$$

Így $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$ a részletösszegek sorozata: ezek tulajdonképpen a ∞ összeg egyre jobb és jobb közelítései.

A fenti példában $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{N-1}} \overset{\text{a rajzról látszik}}{=} 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Def: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort konvergensnek nevezzük, ha a részletösszegek $S_1, S_2, S_3 \dots$ sorozata konvergens.
Ilyenkor a $\lim_{N\to\infty} S_N$ határértéket a $\boxed{\text{sor összegének}}$ nevezzük.

Def: A sor divergens, ha nem konvergens.

Szóhasználat: konvergens sor = felösszegezhető sor

sor összege = a végtelen összeg értéke

[Megjegyzés (fontos, jó tudni): A konvergens, avagy felösszegezhető sor fogalmába beleértjük, hogy a $\lim_{N\to\infty} S_N$ határérték létezik és $\boxed{\text{véges}}$.]

Megeshet, hogy $S_N \to \infty$, így a végtelen összeg értelmes és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, pl $a_n \equiv 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+1+1+\ldots+1+\ldots$$ -re

$$S_N = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{N \text{ db}} = N$$

Vagyis $\lim_{N\to\infty} S_N = \infty$, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots = \infty$$ -hát persze,

de ez a sor divergens.

<u>Jelenség</u>: Ahhoz, hogy a ∞ sok szám összege véges legyen, ~~beug~~ az kellett, hogy egyre kisebb számokat adjunk össze: a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájához <u>beugró feltétel</u>, hogy

$a_n \longrightarrow 0$ teljesüljön.

2. és legfőbb észrevétel: Az $a_n \to 0$ feltétel <u>szükséges</u>,

de **nem elégséges** a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájához.

!!!

<u>Megeshet</u>, hogy $a_n \longrightarrow 0$, és mégis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

2. iskolapélda: Egy béka ugrál felfelé a hegyre, és egyre fárad: az n. ugrása (méterben mérve) $\frac{1}{n}$.

Milyen messzire jut el a béka, ha bőven van ideje?

Válasz: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \underline{\underline{\infty}}$!! A béka bármeddig eljut.

<u>Fapados indoklás</u>:

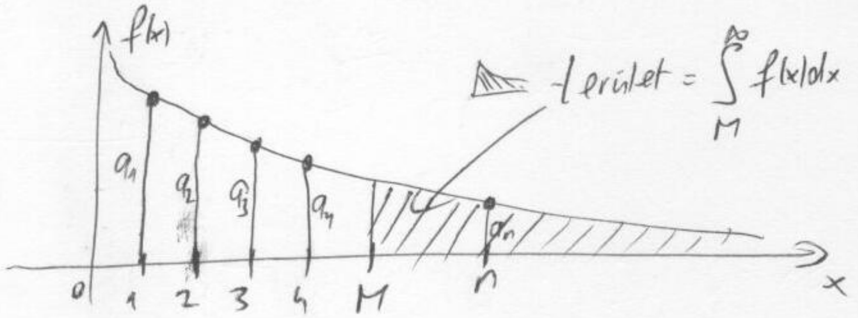
$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}^{\geq \frac{1}{4}}}_{\substack{2 \text{ ugrás } \geq \frac{1}{4} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}^{\geq \frac{1}{8}}}_{\substack{4 \text{ ugrás } \geq \frac{1}{8} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}^{\geq 1/16}}_{\substack{8 \text{ ugrás } \geq 1/16 \\ \geq 1/2}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}}^{\geq 1/32}}_{\substack{16 \text{ ugrás } \geq 1/32 \\ \geq 1/2}} + \frac{1}{33} + \dots$$

Vagyis (a 3. ugrástól kezdve) egyre több és több ugrás kell újabb $1/2$ m megtételéhez, de 2, majd 4, majd 8, 16, ... stb ugrás biztosan elég.

Igazi jó indoklás:

Tétel (integrál-kritérium)

Legyen $f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ monoton csökkenő, nemnegatív függvény, és legyen $a_n = f(n)$ az egész számokban felvett függvényértékek sorozata:

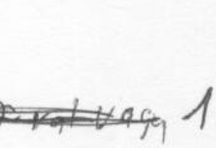


Ekkor ~~a $\sum$~~ minden $M > 0$-ra érvényes, hogy a

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor akkor és csak akkor konvergens

ha az $\int_M^\infty f(x)\,dx$ (improprius) integrál véges.

Megjegyzés: Ezt legtöbbször $M =$ ~~0 vagy~~ 1-gyel jó alkalmazni.
$M = 0$ azért nem ~~jó, mert~~ szerencsés, mert ~~ah~~ ha ~~f~~ pl. $f(x) = \frac{1}{x}$,
ami $x = 0$-ban ∞-hez tart:



akkor az integrálásnál a 0-beli viselkedés is fontos — a sor konvergenciájánál viszont nem számít.

Megj: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor összege nem érdekel, csak az, hogy véges vagy sem, akkor ~~az első~~ nem érdekes a sor „eleje": az első véges sok (mondjuk 100000) tag tetszés szerint megváltoztatható. Ettől persze az összeg változhat, de az, hogy véges vagy végtelen, az nem.

Köv.: ! $f(x)=\frac{1}{x}$ így $a_n=f(n)=\frac{1}{n}$. Ekkor

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_1^\infty = \ln\infty-\ln 1=\infty-0=\infty$$

$\Longrightarrow$ az integrál-kritérium miatt

$$\sum_{n=1}^\infty a_n=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}=\infty.$$

Jelentés: $\frac{1}{n}\to 0$, de lassan, így az összeg végtelen.

Másik példa: ! $f(x)=\frac{1}{x^2}$, így $a_n=f(n)=\frac{1}{n^2}$. Ekkor

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \overset{\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}}{=\!=} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty=\left(-\frac{1}{\infty}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=0+1=1<\infty$$

$$\xrightarrow[\text{kritérium}]{\text{integrál}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots<\infty$$ VÉGES (bár nem tudjuk, hogy mennyi)

<u>Lényeg egyben</u>: Egy (nemnegatív tagokból álló) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor konvergens, ha $a_n \to 0$, éspedig <u>elég gyorsan</u>.

Konkrétan $\frac{1}{n} \to 0$ még <u>nem</u> elég gyors,

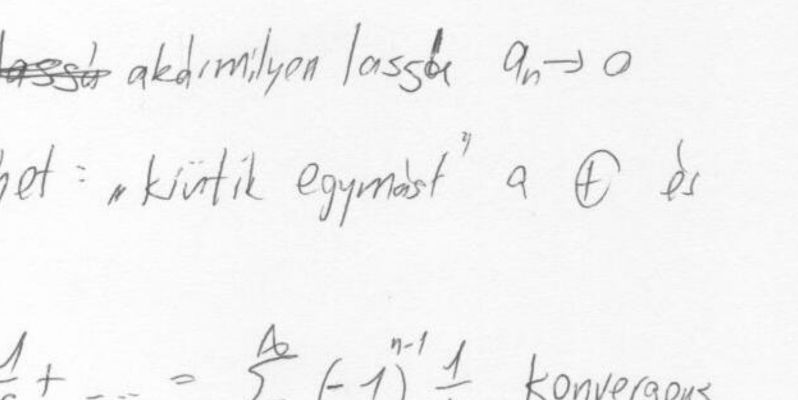
de $\frac{1}{n^2} \to 0$ már igen.

Sőt $\frac{1}{n^{1.01}} \to 0$ is elég gyors.

<u>Megj:</u> Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nem csak pozitív ~~előjelű~~ tagokból áll, hanem pozitív és negatív tagokból vegyesen, akkor lehet „szerencsénk", és ~~lassú~~ akármilyen lassú $a_n \to 0$ konvergencia is elég lehet: „kiütik egymást" a ⊕ és ⊖ tagok.

Pl: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konvergens,

pedig $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ lassan tart 0-hoz,



az S_n sorozat egyre kisebbeket ugrál fel-le: a rajzról látszik, hogy $\forall$ n-re ~~„örökre~~ igaz, hogy „örökre" S_n és S_{n+1} között marad.

Az ilyen „szerencsés" sorok „feltételesen konvergens"-ek.

Def: ~~A~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor <u>abszolút konvergens</u>, ha még

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is konvergens.

Ellenben $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>feltételesen konvergens</u>, ha konvergens,

de nem ~~abszolút~~ abszolút konvergens.

Pl. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ feltételesen konvergens.

Megj: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor <u>Leibniz típusú</u>, ha $|a_n| \searrow 0$
Def:

(a jelölés jelentése: $|a_n| \to 0$, éspedig monoton csökkenő módon) és <u>váltakozó előjelű</u>: ⊕ után mindig ⊖ következik és viszont.

Tétel: A Leibniz típusú sorok mindig konvergensek.

Tétel (összehasonlító kritérium) (elég nyilvánvaló)

Legyenek a_n, b_n <u>nemnegatív</u> sorozatok. Ekkor

- Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és ~~A~~ $b_n \leq a_n$ minden n-re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens.
- Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens és $b_n \geq a_n$ minden n-re, ~~akkor~~ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Pl: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+\sqrt{n}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tehát konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty,$$

tehát divergens.

[Megj: Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorról eldönteni, hogy konvergens-e vagy sem, többnyire könnyű: legtöbbször elég összehasonlítani egy jól ismert sorral, pl. $\sum \frac{1}{n}$ -nel vagy $\sum \frac{1}{n^2}$ -tel.
Viszont az összeget kiszámolni általában nehéz: sokkal nehezebb, mint egy $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ improprius integrált kiszámolni (lásd az ~~imp~~ integrál-kritérium alkalmazását.]

Legfontosabb példák

(1) Mértani sor: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+\dots, \quad a_n := q^n$

illetve $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \dots = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$

$a_n = a_0 q^n$

Ha $|q| \ge 1$, akkor $a_n \not\to 0$, így $\sum_n a_n$ divergens.

Ha viszont $|q| < 1$, akkor $a_n \to 0$ éspedig exponenciálisan gyorsan, ami bőven elég $\Longrightarrow \sum_n a_n$ konvergens.

<u>Sőt</u>, az összeget is tudjuk:

<u>Tétel</u> A $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q|<1$, és ilyenkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 \frac{1}{1-q}$

[Az összeg kiszámolható könnyen megjegyezhető módon:

$$1+q+q^2+q^3+\dots =: s \qquad / \cdot q$$

$$- \quad q+q^2+q^3+q^4+\dots = qs$$

$$1 = s-qs \Rightarrow s = \frac{1}{1-q}$$ Házi.]

(2) $a_n := \frac{1}{n!} \to 0$ nagyon gyorsan $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\dots$

<u>konvergens</u>, éspedig $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \approx 2.718,}$ az Euler féle szám

Sőt: $\forall c \in \mathbb{R}$-re $a_n := \frac{c^n}{n!} \to 0$ gyorsan. mert lehet, hogy $c^n \to \infty$ exponenciálisan gyorsan (ha $c>1$) de az $\frac{1}{n!}$ azt is lenyomja. <u>Tétel:</u> $\forall c \in \mathbb{R}$-re $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} = e^c}$