Tömegkiszolgálás
házi feladatok, 2020 tavasz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2020.03.02.)

HF 1.1 a.) Pistike 9-szer dob egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások közül pont 5 lesz hatos?

b.) Móricka addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg nem sikerül neki hatszor hatost dobni. (A hat darab hatos dobásnak persze nem kell egymás után lenni.) Mennyi a valószínűsége, hogy pont 10 dobásra lesz szüksége?

c.) Legyen X Móricka dobásainak száma. Adjuk meg X eloszlását (vagyis a lehetséges értékeket és azok valószínűségeit)!

d.) Számoljuk ki X várható értékét és szórását! *(Tipp: ehhez nem kell az előző részfeladatot megoldani.)*

HF 1.2 Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A felezési idő 69.31 nap, ami azt jelenti, hogy ha sok körtét nézünk, akkor ennyi idő alatt ég ki a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt napokban mérjük?

b.) Veszünk egyetlen ilyen villanykörtét. Mennyi a valószínűsége, hogy

i.) egy napon belül kiég?

ii.) két napon belül kiég?

iii.) három napon belül kiég?

(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)

2.HF: (Beadási határidő: 2020.03.16.)

HF 2.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3, 4\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 3-as és 4-es állapotba. Ha a 3-as állapotban van, akkor $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 4-es és 1-es állapotba. A 4-es állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát két érmedobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mind a négy állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 1341223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

HF 2.2 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket véletlen idő alatt szolgál ki, és az új gyerekek is véletlenszerűen érkeznek, de szigorúan egyesével. Egy megfigyelő mindig feljegyzi a sor hosszát, amikor az *változik*, vagyis miután eggyel csökken (mert egy gyereket kiszolgáltak), vagy eggyel nő (mert egy új gyerek érkezik). Legyen X_0 a sor kezdeti hossza, X_n pedig a sor hossza az n-edik változás után ($n = 1, 2, 3\ldots$). A megfigyelő azt tapasztalja, hogy X_n valamilyen p valószínűséggel 1-gyel nő, a maradék $q = 1 - p$ valószínűséggel pedig eggyel csökken, az előzményektől függetlenül, kivéve, ha a sor üres (mert akkor persze csak nőni tud), vagy ha a sor hossza elér egy K maximumot, mert akkor több gyerek nem állhat be (az apukája elvonszolja), így onnan a sorhossz csak csökkenhet. (Így X_n Markov lánc.)

Írjuk fel a Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát, keressük meg a stacionárius eloszlásait, valamint döntsük el, hogy a Markov lánc periodikus-e illetve pozitív rekurrens-e vagy sem,

a.) Ha $p = \frac{1}{3}$ és $K = 4$,

b.) Ha $p = \frac{2}{3}$ és $K = 4$,

c.) Ha $p = \frac{1}{3}$ és $K = \infty$,

d.) Ha $p = \frac{2}{3}$ és $K = \infty$.

3.HF: (Beadási határidő: 2020.04.15.) **FIGYELEM! A HF megoldásokat kérem rendesen leírni:**

- **Minden használt jelölés legyen bevezetve.**
- **Minden állítás legyen megindokolva.**
- **Sehol ne álljon képlet vagy szám egymagában: mindig legyen ott, hogy mi van kiszámolva. (Avagy: minden képlet és szám egy állítás része legyen.)**
- **Legyen áttekinthető logikai sorrend!**

HF 3.1 Mórickáék házához 3 lépcső vezet fel, Móricka ezeken ugrál. Lehetséges pozíciói $\{0, 1, 2, 3\}$ attól függően, hogy hány lépcsőfok van alatta. Percenként pontosan egyet ugrik. Minden ugrás előtt dob egy szabályos dobókockával, az eredményből kivon 3-at, és annyi lépcsőt ugrik (egyetlen ugrással) *felfelé*. (Ha a kivonás után kapott szám nulla, akkor helyben ugrik; ha negatív, akkor lefelé.) Ha ezzel túlugrana a legfelső vagy legalsó szinten, akkor persze csak odáig ugrik. (Pl. ha az 1-es szinten van és 4-et dob, akkor a 4-3=1 szintet ugrik felfelé, vagyis a 2-esre ugrik. Ha viszont az 1-es szinten van és 1-et dob, akkor 1-3=-2 miatt 2 szintet kéne lefelé ugrania, de annyi nincs, ezért a 0-s szintre ugrik.)

a.) Legyen $X_n \in S = \{0, 1, 2, 3\}$ Móricka pozíciója n perc elteltével. Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

b.) Tegyük fel, hogy Móricka pont most érkezett a 2-es állapotba. Legyen T_2 az ott eltöltött idő percben (ami tehát legalább 1). Neve „tartózkodási idő". (Ez akkor lesz 1-nél nagyobb, ha néhányszor helyben ugrik.) Adjuk meg T_2 eloszlását és várható számoljuk ki az $a_2 := \mathbb{E}T_2$ várható értékét!

c.) Végezzük el ugyanezt a többi állapotra is, és írjuk táblázatba:

i	0	1	2	3
a_i				

d.) Legyen Y_k Móricka pozíciója az k-adik *változás* után. Vagyis k „módosított idő" azt számolja, hogy hányszor ugrott Móricka *nem helyben*: ha helyben ugrik, akkor az Y_k folyamat órája „nem kettyen". Írjuk fel az Y_k Markov lánc átmenetmátrixát! *(Tipp: azt kell nézni, hogy Móricka az i-edik állapotból mekkora valószínűséggel ugrik a j-edik állapotba,* ***feltéve****, hogy nem helyben ugrik. Vagyis*

$$\mathbb{P}(Y_1 = j \mid Y_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i \textit{ és } X_1 \neq i).$$

)

e.) Keressük meg az Y_k Markov lánc egyetlen π_Y stacionárius eloszlását! *(A számolás közepesen szörnyű. A lineáris egyenletrendszer megoldásához szabad számítógépet* *használni, de csúnya tizedes törtek helyett szeretnék pontos értéket látni!)* Honnan tudjuk előre, hogy pontosan egy van?

i	0	1	2	3
$\pi_{Y,i}$				

f.) Hosszú távon a „módosított idő" mekkora hányadában lesz Móricka a legfelső szinten? (Avagy, ami ugyanez: hosszú távon az új helyre való érkezések mekkora hányada történik a 3-as állapotba?) Miért? Adjuk meg ugyanezt a többi állapotra is!

g.) Számoljuk ki az f.) és c.) pontok eredménye alapján (**és nem másból**), hogy Móricka a *tényleges idő* mekkora r_i hányadát tölti az egyes állapotokban:

i	0	1	2	3
r_i				

h.) Ellenőrizzük le a.) alapján, hogy az $\{r_i\}$ az X_n Markov lánc stacionárius eloszlása!

HF 3.2 Egy kertész minden reggel kihúzgálja a kertben a gyom nagyjából p-ed részét. Egész pontosan: minden gyom esetében feldob egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége p, és ha az eredmény fej, akkor kihúzza (egyébként nem). A ki nem húzott gyomok másnap reggelre elszaporodnak: mind életben marad, és önmaga mellé létrehoz még 1 utódot. Legyen X_n a gyomok száma az n-edik reggelen. Mely p értékekre tudjuk, hogy az X_n Markov lánc stabil? Ezekre a p értékekre mi lesz a határeloszlás?