

**Tömegkiszolgálás**  
**házi feladatok megoldásai, 2020 tavasz**

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2020.03.02.)

- HF 1.1 a.) Pistike 9-szer dob egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások közül pont 5 lesz hatos?
- b.) Móricka addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg nem sikerül neki hatszor hatost dobni. (A hat darab hatos dobásnak persze nem kell egymás után lenni.) Mennyi a valószínűsége, hogy pont 10 dobásra lesz szüksége?
- c.) Legyen  $X$  Móricka dobásainak száma. Adjuk meg  $X$  eloszlását (vagyis a lehetséges értékeket és azok valószínűségeit)!
- d.) Számoljuk ki  $X$  várható értékét és szórását! (*Tipp: ehhez nem kell az előző részfeladatot megoldani.*)

**Megoldás:**

- a.) Legyen  $Y$  a dobott hatosok száma 9 próbálkozásból. Így  $Y$  binomiális eloszlású  $n = 9$  és  $p = \frac{1}{6}$  paraméterekkel, ezért

$$\mathbb{P}(Y = 5) = \binom{9}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{9-5} \approx 0.0078 = 0.78\%$$

- b.) Ehhez az kell, hogy az első 9 dobásból pont 5 legyen hatos (mint az előző feladatban), és a tizedik dobás is hatos legyen. Vagyis a függetlenség miatt, az előző feladat-beli  $Y$  jelöléssel

$$\mathbb{P}(\text{pont 10 dobás kell}) = \mathbb{P}(Y = 5) \frac{1}{6} = \binom{9}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.0013 = 0.13\%$$

- c.)  $X$  lehetséges értékei persze  $k = 6, 7, 8, 9, \dots$ . Ezek valószínűségei az előző feladat mintájára

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-6}$$

- d.) Legyen  $\xi_1$  az első hatoshoz szükséges dobások száma. Legyen  $\xi_2$  a második hatoshoz szükséges dobások száma *az első hatostól számítva*. Legyen  $\xi_3$  a harmadik hatoshoz szükséges dobások száma *a második hatostól számítva*. És így tovább: legyen  $\xi_n$  az  $n$ -edik hatoshoz szükséges dobások száma *az  $n-1$ -edik hatostól számítva*. Így  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  azonos,  $\text{Geom}(\frac{1}{6})$  eloszlásúak, amiből  $\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{1/6} = 6$  és  $\text{Var}\xi_1 = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$ . És persze a lényeg, hogy

$$X = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_6.$$

A várható érték összeadódik, ezért

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\xi_1 + \dots + \mathbb{E}\xi_6 = 6 \cdot 6 = 36.$$

Ezen felül a  $\xi_i$ -k *függetlenek is*, ezért a szórásnégyzetük is összeadódik:

$$\text{Var}X = \text{Var}\xi_1 + \dots + \text{Var}\xi_6 = 6 \cdot 30 = 180.$$

Ebből a szórás

$$DX = \sqrt{\text{Var}X} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \approx 13.4$$

(Megjegyzés: Persze igaz, hogy

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=6}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=6}^{\infty} k \binom{k-1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-6} = \dots = 36,$$

de ezt sokkal macerásabb kiszámolni. Arról nem is beszélve, hogy milyen macerás az

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=6}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=6}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-6} = \dots = 1476$$

számolás, amiből  $\text{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = 1476 - 36^2 = 180$ . A tanulság az, hogy a várható értéket és a szórást sokszor nem közvetlenül az eloszlásból célszerű számolni. )

HF 1.2 Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A felezési idő 69.31 nap, ami azt jelenti, hogy ha sok körtét nézünk, akkor ennyi idő alatt ég ki a fele.

- a.) Mennyi az élettartam eloszlásának  $\lambda$  paramétere (rátája)
  - i.) ha az időt években mérjük?
  - ii.) ha az időt napokban mérjük?
- b.) Veszünk egyetlen ilyen villanykörtét. Mennyi a valószínűsége, hogy
  - i.) egy napon belül kiég?
  - ii.) két napon belül kiég?
  - iii.) három napon belül kiég?(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)

### Megoldás:

- a.) Az egyszerűség kedvéért úgy számolok, hogy 1év = 365nap. Legyen az élettartam  $X$ , ennek eloszlásfüggvénye  $F$ , a felezési idő pedig  $T_{1/2} = 69.31$ nap. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X < T_{1/2}) = F(T_{1/2}) = 1 - e^{-\lambda T_{1/2}},$$

amiből

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0.6931}{69.31\text{nap}} = 0.01 \frac{1}{\text{nap}} = 3.65 \frac{1}{\text{év}},$$

tehát

- i.) ha az időt években mérjük, akkor  $\lambda \approx 3.65$ ,
  - ii.) ha az időt napokban mérjük, akkor  $\lambda \approx 0.01$ .
- b.) Az időt napokban mérve
    - i.)  $\mathbb{P}(X < 1) = F(1) \approx 1 - e^{-0.01} \approx 0.00995$
    - ii.)  $\mathbb{P}(X < 2) = F(2) \approx 1 - e^{-0.02} \approx 0.01980$
    - iii.)  $\mathbb{P}(X < 3) = F(3) \approx 1 - e^{-0.03} \approx 0.02955$

Figyelemre méltó, hogy még két értékes jegyre kerekítve is

- i.)  $\mathbb{P}(X < 1) \approx 0.010$
- ii.)  $\mathbb{P}(X < 2) \approx 0.020$
- iii.)  $\mathbb{P}(X < 3) \approx 0.030$

vagyis rövid  $t$  időre jó közelítéssel  $\mathbb{P}(X < t) \approx \lambda t$ .

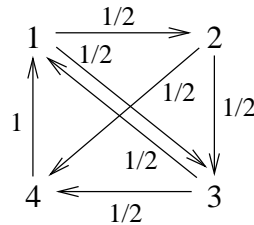
2.HF: (Beadási határidő: 2020.03.16.)

HF 2.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén  $X_n$  Markov lánc állapottere  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . A Markov lánc az 1-es állapotból 50–50% valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50–50% valószínűséggel ugrik a 3-as és 4-es állapotba. Ha a 3-as állapotban van, akkor 50–50% valószínűséggel ugrik a 4-es és 1-es állapotba. A 4-es állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc  $X_0$  kezdeti állapotát két érmedobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mind a négy állapotnak.

- Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.
- Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.
- Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.
- Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 1341223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?
- Mennyi a  $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$  átmenetvalószínűség?
- Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

**Megoldás:**

- A gráf-reprezentáció



- Az átmenetmátrix  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- A kezdeti eloszlás vektor  $\pi(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , mert mind a négy állapotnak azonos esélyt adtunk.
- 

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1341223) &= \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 2, X_6 = 3) \\ &= \pi_1(0)P_{13}P_{34}P_{41}P_{12}P_{22}P_{23} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

- Az 1-es állapotból az 1-esbe négy lépésben visszajutni csak kétféleképpen lehet:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ , vagy  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Ezek feltételes val.sége (feltéve, hogy  $X_0 = 1$ )  $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41} = \frac{1}{8}$ , illetve  $P_{13}P_{31}P_{13}P_{31} = \frac{1}{16}$ , így

$$\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

- Minden  $\pi$  stacionárius eloszlás (sorvektor) a

$$(P^T - I)\pi^T = 0$$

lineáris egyenletrendszer olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. (Itt  $I$  az egységmátrix.) Jelen esetben

$$P^T - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

vagyis a lineáris egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Ezt megoldjuk pl. Gauss eliminációval:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/8 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 & -3/4 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/8 & 3/4 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6/5 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 8/5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6/5 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

amiből

$$\pi_1 = \frac{8}{5}\pi_4, \quad \pi_2 = \frac{4}{5}\pi_4, \quad \pi_3 = \frac{6}{5}\pi_4.$$

Így pl. a  $\pi_4 := 5$  önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását, aminek minden más megoldás a számszorosa:  $\tilde{\pi} = (8465)$ . Ez még nem az, amit keresünk, mert az elemek összege nem 1, hanem  $8 + 4 + 6 + 5 = 23$ , ezért a keresett egyetlen normált megoldást úgy kapjuk, hogy ezt a  $\tilde{\pi}$ -t lenormáljuk, vagyis leosztjuk 23-mal:

$$\pi = \left( \frac{8}{23} \quad \frac{4}{23} \quad \frac{6}{23} \quad \frac{5}{23} \right).$$

HF 2.2 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket véletlen idő alatt szolgál ki, és az új gyerekek is véletlenszerűen érkeznek, de szigorúan egyesével. Egy megfigyelő mindig feljegyzi a sor hosszát, amikor az *változik*, vagyis miután eggyel csökken (mert egy gyereket kiszolgáltak), vagy eggyel nő (mert egy új gyerek érkezik). Legyen  $X_0$  a sor kezdeti hossza,  $X_n$  pedig a sor hossza az  $n$ -edik változás után ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). A megfigyelő azt tapasztalja, hogy  $X_n$  valamilyen  $p$  valószínűséggel 1-gyel nő, a maradék  $q = 1 - p$  valószínűséggel pedig eggyel csökken, az előzményektől függetlenül, kivéve, ha a sor üres (mert akkor persze csak nőni tud), vagy ha a sor hossza elér egy  $K$  maximumot, mert akkor több gyerek nem állhat be (az apukája elvonszolja), így onnan a sorhossz csak csökkenhet. (Így  $X_n$  Markov lánc.)

Írjuk fel a Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát, keressük meg a stacionárius eloszlásait, valamint döntsük el, hogy a Markov lánc periodikus-e illetve pozitív rekurrens-e vagy sem,

- Ha  $p = \frac{1}{3}$  és  $K = 4$ ,
- Ha  $p = \frac{2}{3}$  és  $K = 4$ ,
- Ha  $p = \frac{1}{3}$  és  $K = \infty$ ,
- Ha  $p = \frac{2}{3}$  és  $K = \infty$ .

**Megoldás:**

Az állapottér az a.) és b.) esetben  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , a c.) és d.) esetben  $S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . A gráf-reprezentáció  $q := 1 - p$  jelöléssel az a.) és b.) esetben

$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 3 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 4$$

a c.) és d.) esetben

$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 3 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} 4 \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} \dots$$

Így az átmenetmátrix az a.) és b.) esetben

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A  $\pi$  stacionárius eloszlás (sorvektor) keresésének egyik módja, hogy megoldjuk a  $(P_I^T)\pi^T = 0$  lineáris egyenletrendszer. A Gauss eliminációt csak odáig csináljuk, hogy a főátló alatt csupa nulla legyen: ehhez a főátló minden eleme segítségével csak egy nemnulla elemet kell eliminálni (a közvetlenül alatta lévő):

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Az egyenleteket kiolvassva azt látjuk, hogy

$$(1) \quad 1\pi_0 = q\pi_1, \quad p\pi_1 = q\pi_2, \quad p\pi_2 = q\pi_3, \quad p\pi_3 = 1\pi_4$$

vagyis megvan a megoldás rekurzívan:

$$(2) \quad \pi_1 = \frac{1}{q}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2, \quad \pi_4 = p\pi_3.$$

Például  $\pi_0 = 1$  önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását, aminek minden más megoldás a számszorosa:

$$\tilde{\pi} = \left( 1 \quad \frac{1}{q} \quad \frac{p}{q^2} \quad \frac{p^2}{q^3} \quad \frac{p^3}{q^3} \right)$$

a.) Mivel  $p = \frac{1}{3}$  és  $q = \frac{2}{3}$ ,

$$\tilde{\pi} = \left( 1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8} \right)$$

Ebben a sorösszeg  $1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{30}{8}$ , vagyis a normáláshoz ennyivel kell leosztani:

$$\pi = \left( \frac{8}{30} \quad \frac{12}{30} \quad \frac{6}{30} \quad \frac{3}{30} \quad \frac{1}{30} \right).$$

Látható, hogy a vége felé erősen csökken – hát persze: ez a folyamat lefelé szeret ugrani.

b.) Mivel  $p = \frac{2}{3}$  és  $q = \frac{1}{3}$ ,

$$\tilde{\pi} = (1 \quad 3 \quad 6 \quad 12 \quad 8)$$

Ebben a sorösszeg  $1 + 3 + 6 + 12 + 8 = 30$ , vagyis a normáláshoz ennyivel kell leosztani:

$$\pi = \left( \frac{1}{30} \quad \frac{3}{30} \quad \frac{6}{30} \quad \frac{12}{30} \quad \frac{8}{30} \right).$$

Hát persze: Ez a Markov lánc pont ugyanaz, mint az előző, csak az állapotok vannak fordított sorrendben számozva.

A c.) és d.) esetben a mátrix végtelen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

de  $(P^T - I)\pi^T = 0$  lineáris egyenletrendszer megoldása ugyanúgy megy, mint eddig:

$$\begin{pmatrix} -1 & q & 0 & 0 & 0 & \dots & | & 0 \\ 1 & -1 & q & 0 & 0 & & | & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 & & | & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & q & & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & & | & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & | & \vdots \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} -1 & q & 0 & 0 & 0 & \dots & | & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & & | & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & q & & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p & & | & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & | & \vdots \end{pmatrix}$$

Az egyenleteket kiolvastva azt látjuk, hogy

$$(3) \quad 1\pi_0 = q\pi_1 \quad , \quad p\pi_1 = q\pi_2 \quad , \quad p\pi_2 = q\pi_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad p\pi_k = q\pi_{k+1} \quad , \quad \dots$$

vagyis megvan a megoldás rekurzívan:

$$(4) \quad \pi_1 = \frac{1}{q}\pi_0 \quad , \quad \pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1 \quad , \quad \pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \pi_{k+1} = \frac{p}{q}\pi_k \quad , \quad \dots$$

amiből egyből látszik a zárt alak:

$$\pi_k = \frac{1}{q} \left( \frac{p}{q} \right)^{k-1} \pi_0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

Például  $\pi_0 = 1$  önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását, aminek minden más megoldás a számszorosa:

$$\tilde{\pi} = \left( 1 \quad \frac{1}{q} \quad \frac{p}{q^2} \quad \frac{p^2}{q^3} \quad \frac{p^3}{q^4} \quad \dots \quad \frac{1}{q} \left( \frac{p}{q} \right)^{k-1} \quad \dots \right)$$

c.) Mivel  $p = \frac{1}{3}$  és  $q = \frac{2}{3}$ ,

$$\tilde{\pi} = \left( 1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{16} \quad \dots \quad \frac{3}{2^k} \quad \dots \right).$$

Ebben a sorösszeg  $1 + 3 * \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 1 + 3 * 1 = 4$ , vagyis a normáláshoz ennyivel kell leosztani:

$$\pi = \left( \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{3}{32} \quad \frac{3}{64} \quad \dots \quad \frac{3}{4 \cdot 2^k} \quad \dots \right).$$

Hogy teljesen precízek legyünk:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \text{ ha } k = 0 \\ \frac{3}{4 \cdot 2^k} & , \text{ ha } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

d.) Mivel  $p = \frac{2}{3}$  és  $q = \frac{1}{3}$ ,

$$\tilde{\pi} = (1 \quad 3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad \dots \quad 3 \cdot 2^{k-1} \quad \dots).$$

Ebben a sorösszeg  $1 + 3 + 6 + 12 + 24 + \dots = \infty$ , vagyis a lineáris egyenletrendszer megoldásai *nem normálhatók*. Ennek megfelelően ennek a Markov láncnak **nincs stacionárius eloszlása**. (Megj: Stacionárius *mérték* van, hiszen épp most találtuk meg, de **eloszlás** csak úgy lehetne, ha az *össz-súly* 1.)

Végül az utolsó két kérdésre a válasz:

- A Markov lánc mind a négy esetben periodikus, mert pl. a 0-ból a 0-ba csak páros sok lépésben lehet visszajutni: a periódus 2.
- A Markov lánc mind a négy esetben irreducibilis. Irreducibilis Markov láncról tudjuk, hogy akkor és csak akkor van stacionárius **eloszlása**, ha pozitív rekurrens. Ennek megfelelően az a.) b.) és c.) eset pozitív rekurrens, a d.) eset viszont nem.

3.HF: (Beadási határidő: 2020.04.15.) **FIGYELEM! A HF megoldásokat kérem rendesen leírni:**

- Minden használt jelölés legyen bevezetve.
- Minden állítás legyen megindokolva.
- Sehol ne álljon képlet vagy szám egymagában: mindig legyen ott, hogy mi van kiszámolva. (Avagy: minden képlet és szám egy állítás része legyen.)
- Legyen áttekinthető logikai sorrend!

HF 3.1 Mórlickák házához 3 lépcső vezet fel, Mórlicka ezeken ugrál. Lehetséges pozíciói  $\{0, 1, 2, 3\}$  attól függően, hogy hány lépcsőfok van alatta. Percenként pontosan egyet ugrik. Minden ugrás előtt dob egy szabályos dobókockával, az eredményből kivon 3-at, és annyi lépcsőt ugrik (egyetlen ugrással) *felfelé*. (Ha a kivonás után kapott szám nulla, akkor helyben ugrik; ha negatív, akkor lefelé.) Ha ezzel túlugrana a legfelső vagy legalsó szinten, akkor persze csak odáig ugrik. (Pl. ha az 1-es szinten van és 4-et dob, akkor a  $4 - 3 = 1$  szintet ugrik felfelé, vagyis a 2-esre ugrik. Ha viszont az 1-es szinten van és 1-et dob, akkor  $1 - 3 = -2$  miatt 2 szintet kéne lefelé ugrania, de annyi nincs, ezért a 0-s szintre ugrik.)

- a.) Legyen  $X_n \in S = \{0, 1, 2, 3\}$  Mórlicka pozíciója  $n$  perc elteltével. Írjuk fel az  $X_n$  Markov lánc átmenetmátrixát!
- b.) Tegyük fel, hogy Mórlicka pont most érkezett a 2-es állapotba. Legyen  $T_2$  az ott eltöltött idő percben (ami tehát legalább 1). Neve „tartózkodási idő”. (Ez akkor lesz 1-nél nagyobb, ha néhányszor helyben ugrik.) Adjuk meg  $T_2$  eloszlását és számoljuk ki az  $a_2 := \mathbb{E}T_2$  várható értékét!
- c.) Végezzük el ugyanezt a többi állapotra is, és írjuk táblázatba:

$i$	0	1	2	3
$a_i$				

- d.) Legyen  $Y_k$  Mórlicka pozíciója az  $k$ -edik *változás* után. Vagyis  $k$  „módosított idő” azt számolja, hogy hányszor ugrott Mórlicka *nem helyben*: ha helyben ugrik, akkor az  $Y_k$  folyamat órája „nem kettően”. Írjuk fel az  $Y_k$  Markov lánc átmenetmátrixát! (Tipp: azt kell nézni, hogy Mórlicka az  $i$ -edik állapotból mekkora valószínűséggel ugrik a  $j$ -edik állapotba, **feltéve**, hogy *nem helyben ugrik*. Vagyis

$$\mathbb{P}(Y_1 = j | Y_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i \text{ és } X_1 \neq i).$$

)

- e.) Keressük meg az  $Y_k$  Markov lánc egyetlen  $\pi_Y$  stacionárius eloszlását! (A számolás közepesen szörnyű. A lineáris egyenletrendszer megoldásához szabad számológépet használni, de csúnya tizedes törtek helyett szeretnék pontos értéket látni!) Honnan tudjuk előre, hogy pontosan egy van?

$i$	0	1	2	3
$\pi_{Y,i}$				

- f.) Hosszú távon a „módosított idő” mekkora hányadában lesz Móricka a legfelső szinten? (Avagy, ami ugyanez: hosszú távon az új helyre való érkezések mekkora hányada történik a 3-as állapotba?) Miért? Adjuk meg ugyanezt a többi állapotra is!
- g.) Számoljuk ki az f.) és c.) pontok eredménye alapján (és **nem másból**), hogy Móricka a *tényleges idő* mekkora  $r_i$  hányadát tölti az egyes állapotokban:

$i$	0	1	2	3
$r_i$				

- h.) Ellenőrizzük le a.) alapján, hogy az  $\{r_i\}$  az  $X_n$  Markov lánc stacionárius eloszlása!

### Megoldás:

- a.) Jelölje az átmenetmátrixot  $P^{(X)}$ . 0-ból indulva 6-os dobással 3-ba jutunk, 5-össel 2-be, 4-essel 1-be, a többi dobással 0-ba, vagyis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 0) &= \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 0) &= \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) &= \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0) &= \frac{3}{6}\end{aligned}$$

Ugyanígy végiggondolva az ugrási valószínűségeket a többi helyről, az átmenetmátrix

$$P^{(X)} = \begin{pmatrix} 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{pmatrix}.$$

- b.) Minden alkalommal, az előzményektől függetlenül,  $1 - P_{22}^{(X)} = \frac{5}{6}$  valószínűséggel sikerül elugrania a 2-es állapotból,  $T_2$  pedig pontosan az elugráshoz szükséges próbálkozások száma, vagyis  $T_2 \sim \text{Geom}(\frac{5}{6})$ , amiből  $a_2 = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$ .
- c.) Ugyanígy minden  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ -ra  $a_i = \mathbb{E}\text{Geom}(1 - P_{ii}^{(X)}) = \frac{1}{1 - P_{ii}^{(X)}}$ :

$i$	0	1	2	3
$a_i$	6/3	6/5	6/5	6/2

- d.) Jelölje az átmenetmátrixot  $P^{(X)}$ . Ennek főátlójában csupa nulla van, mert az  $Y^k$  folyamatban helyben ugrás nincs. A főátlón kívüli elemeket a  $P^{(X)}$  főátlón kívüli elemeinek lenormálásával kapjuk, úgy, hogy minden sorösszeg 1 legyen. Pl.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = 1 | Y_0 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0 \text{ és } X_1 \neq 0) = \frac{P_{01}^{(X)}}{P_{01}^{(X)} + P_{02}^{(X)} + P_{03}^{(X)}} \\ &= \frac{1/6}{1/6 + 1/6 + 1/6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$



Ennek mintájára

$$P^{(Y)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- e.) Stacionárius eloszlásból pontosan egy van, mert az  $Y^{(k)}$  Markov-lánc véges állapotterű és irreducibilis.  $\pi_Y$  kereséséhez a  $(P^{(Y)} - I)^T \pi_Y^T = 0$  lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/5 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 3/5 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Ezt mindenki úgy oldja meg, hogy akarja: most egy lehetséges kézi számolást mutatok. Az épeszű kézi számolás kedvéért több helyen eltérek a szokványos Gauss eliminációtól:

- először végigszorozom az első sort 5-tel, a másodikat és a harmadikat 30-cal, az utolsót 15-tel.
- A második oszlop eliminációja előtt kivonom a 4. sorból a 3.-at, majd felcserélem a 2. és 4. sort és az egyiket végigszorozom  $-1$ -gyel.
- Végül nem  $\pi_{Y,4}$ -et hagyom meg szabad változónak, hanem  $\pi_{Y,3}$ -at, vagyis a 3. oszlopban nem csinállok visszahelyettesítést, a 4.-ben viszont igen:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/5 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 3/5 & -1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -30 & 6 & 15 & 0 \\ 10 & 6 & -30 & 15 & 0 \\ 5 & 6 & 9 & -15 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 8 & 15 & 0 \\ 0 & 10 & -28 & 15 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -15 & 0 \end{array} \right) &\sim \\ &\left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 8 & 15 & 0 \\ 0 & 10 & -28 & 15 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \\ 0 & 10 & -28 & 15 & 0 \\ 0 & 26 & -8 & -15 & 0 \end{array} \right) &\sim \\ &\left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 162 & -135 & 0 \\ 0 & 0 & 486 & -405 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) &\sim \\ &\left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 19 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \end{array} \right) &\sim \\ &\left( \begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Innen pl.  $\pi_{Y,3} := 5$  választással  $\pi_{Y,1} = 3$ ,  $\pi_{Y,2} = 5$ ,  $\pi_{Y,4} = 6$ , vagyis a homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása

$$\tilde{\pi}_Y = (3 \ 5 \ 5 \ 6).$$

Az összes többi megoldás ennek számszorosa, minket pedig az az egy érdekel,

amiben a sorösszeg 1: 
$$\frac{i}{\pi_{Y,i}} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3/19 & 5/19 & 5/19 & 6/19 \end{array} \right.$$

f.) Az  $Y_k$  Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel értelmében

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\#\{k : 0 \leq k < K, Y_k = 3\}}{K} = \pi_{Y,3},$$

vagyis hosszú távon a módosított idő  $\pi_{Y,3} = \frac{6}{19}$ -ed részében lesz Móricka a legfelső szinten.

Ugyanígy: hosszú távon a módosított idő  $\pi_{Y,i}$  hányadát tölti az  $i$ -edik szinten.

g.) Hosszú távon az egyes szinteken eltöltött tényleges idők úgy aránylanak egymáshoz, mint

$$\begin{aligned} \pi_{Y,1}a_1 : \pi_{Y,2}a_2 : \pi_{Y,3}a_3 : \pi_{Y,4}a_4 \\ = \\ \frac{6}{19} : \frac{6}{19} : \frac{6}{19} : \frac{18}{19} \\ = \\ 1 : 1 : 1 : 3 \end{aligned}$$

Ezt kell lenormálni:

$i$	0	1	2	3
$r_i$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$3/6$

h.) És valóban:

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \end{pmatrix}.$$

Hurrá.

HF 3.2 Egy kertész minden reggel kihúzgálja a kertben a gyom nagyjából  $p$ -ed részét. Egész pontosan: minden gyom esetében feldob egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége  $p$ , és ha az eredmény fej, akkor kihúzza (egyébként nem). A ki nem húzott gyomok másnap reggelre elszaporodnak: mind életben marad, és önmaga mellé létrehoz még 1 utódot. Legyen  $X_n$  a gyomok száma az  $n$ -edik reggelen. Mely  $p$  értékekre tudjuk, hogy az  $X_n$  Markov lánc stabil? Ezekre a  $p$  értékekre mi lesz a határeloszlás?

**Megoldás:**

**Fontos előzetes megjegyzés:** Erre a folyamatra *nem érvényes az  $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$  sorhossz-evolúciós egyenlet és a rá vonatkozó stabilitási feltétel, mert az érkező új gyomok száma *nem független* a már meglévőktől. Helyette közvetlenül a Foster-kritériumot alkalmazzuk.*

Legyen  $q = 1 - p$ . Az  $X_n = k$  feltétel mellett a kihúzgálást megúsó gyomok száma  $\sim \text{Bin}(k, q)$ , ennek várható értéke  $kq$ .  $X_{n+1}$  ennek pont kétszerese, vagyis

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n = k) = 2kq.$$

Látható, hogy ha  $q > \frac{1}{2}$ , akkor a várható érték nő, ha pedig  $q < \frac{1}{2}$ , akkor csökken, és ilyenkor várható stabil viselkedés.

Ha  $X_n$  irreducibilis és aperiodikus lenne, akkor  $q < \frac{1}{2}$ -re a Foster kritérium biztosítaná a stabilitást, hiszen

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n = k) = 2kq = k - k(1 - 2q) \leq k - \delta$$

minden  $k \geq I$ -re, ahol  $I = 1 < \infty$  és  $\delta = 1 - 2q > 0$ . (A Foster kritérium pont azt mondja, hogy ha van ilyen  $I < \infty$  és  $\delta > 0$  és a Markov lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor a Markov lánc stabil.)

Egyetlen pici gond, hogy  $X_n$  nem irreducibilis, hiszen a 0 állapot elnyelő: ha nincs gyom, akkor nem is lesz.

Egy lehetséges megoldás, hogy módosítjuk a Markov láncot. Pl: az  $\tilde{X}_n$  Markov lánc fejlődjön ugyanúgy, mint  $X_n$  mindaddig, amíg el nem éri a 0-t, de ha nincs gyom, akkor  $\frac{1}{1000000}$  valószínűséggel elültetünk egyet. Így  $\tilde{X}_n$  már irreducibilis és aperiodikus, és a Foster kritérium miatt stabil. Viszont ez azt jelenti, hogy bárhonnán indítva 1 valószínűséggel eléri a 0 állapotot. Ebből pedig következik, hogy az  $X_n$  is bárhonnán indítva 1 valószínűséggel eléri a 0 állapotot, vagyis kihál, és úgy is marad.

Röviden, amit beláttunk:

**Ha  $1 - p = q < \frac{1}{2}$  (vagyis  $p > \frac{1}{2}$ ), akkor  $X_n$  stabil, és határeloszlása a 0 állapotra koncentrált eloszlás, vagyis az  $(1, 0, 0, 0, \dots)$  vektor.**

(Megjegyzés 1: Ugyanez abból is kijön, hogy  $\mathbb{E}X_{n+1} = 2q\mathbb{E}X_n$ , így ha  $q < \frac{1}{2}$ , akkor  $\mathbb{E}X_n \rightarrow 0$ . Mivel  $X_n \geq 0$ , ebből következik, hogy  $X_n \rightarrow 0$ .)

(Megjegyzés 2: Nem teljesen nyilvánvaló, de könnyen hihető, hogy ha  $q > \frac{1}{2}$ , akkor  $X_n$  nem stabil: lehet, hogy kihál, de ennek valószínűsége 1-nél kisebb, a maradék pozitív valószínűséggel viszont  $\infty$ -hez tart. Még kevésbé nyilvánvaló, de igaz, hogy ha  $p = q = \frac{1}{2}$ , akkor a  $X_n$  stabil, és pedig 1 valószínűséggel kihál (bár a kihálási idő várható értéke végtelen).)