

Tömegkiszolgálás

ZH, 2020 tavasz, 2020.05.05, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

1. Pistike, Jancsika és Móricka matricákat gyűjt, amiket a csokihoz adnak a boltban. Hatféle matrica van, minden csokihoz egyet adnak, mindegyiket azonos valószínűséggel (az előzményektől függetlenül).
 - a.) Pistikének már három féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy négyféle legyen?
 - b.) Jancsikának már k -féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy $(k+1)$ -féle legyen? (Itt $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.)
 - c.) Móricka csak most kezdi a gyűjtést. Mennyi a teljes matrica-készlet kigyűjtéséhez kibontandó csokik számának várható értéke és szórása?
2. Egy udvaron két kutya van, egymáshoz közel (Anna és Bella), rajtuk összesen 3 bolha. A bolhák az órát nézik, és minden percben, az előzményektől függetlenül, kiválasztanak maguk közül 1-et, aki átugrik az aktuális helyéről a másik kutyára – miközben a többiek maradnak, ahol voltak.

Kezdetben mind a 3 bolha Bellán van. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 120 perc elteltével minden bolha Annán lesz?
3. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = z^5 e^{z-c}$, ahol $c \in \mathbb{R}$.
 - a.) Mennyi a c konstans értéke?
 - b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?
 - c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 100)$ valószínűség?
4. Józsi bácsi minden este feldob egy szabályos érmét, és ha az eredmény fej, akkor megiszik egy üveg bort – feltéve persze, hogy van a kamrában bor. Cserébe minden délelőtt elgurít egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 6-os, akkor elmegy a boltba, hoz K üveg bort és beteszi a kamrába. (Itt $K \in \{1, 2, 3, \dots\}$.) Hosszú távon átlagosan hány delet tölt Józsi bácsi kamrájában egy üveg bor? (A választ adjuk meg K függvényében!)
5. Jancsi egy listáról ZH-eredményeket diktál Juliskának, aki a Neptunba írja őket. Ciklusokban dolgoznak: egy ciklus során
 - Jancsi 5 másodperc alatt bemond egy nevet a listáról,
 - majd lediktálja 4 hallgató pontszámát, 5 másodpercenként egyet. (Vagyis a négyből három hallgató nevét Jancsi nem mondja be: bízik benne, hogy helyes sorrendben vannak a listán.)

- Ez után Juliska szintén 5 másodperc alatt visszajelez, hogy mindent jól értett-e.

(Így az egész ciklus $5+20+5=30$ másodpercig tart.) Ha Juliska mindent értett, akkor mennek tovább, ha viszont nem, akkor újakezdik a ciklust.

Juliska a neveket és az egyes pontszámokat is 90% valószínűséggel érti, egymástól függetlenül.

- a.) Percenként hány pontszámot tudnak így beírni hosszú távon?
- b.) Lehetne gyorsabban haladni, ha Jancsi nem 4-esével diktálná az eredményeket? Ha igen, hányasával lenne optimális?