Tömegkiszolgálás
gyakorló és házi feladatok, 2020 tavasz

1. Elemi valószínűségszámítás

1.1 **(2 pont)** Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X-szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y-nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?

1.2 **(2 pont)** Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3 \ldots$-re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim Bin(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$-re számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(Tipp: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.*)*

2. Diszkrét idejű Markov láncok

2.1 **(5 pont)** Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

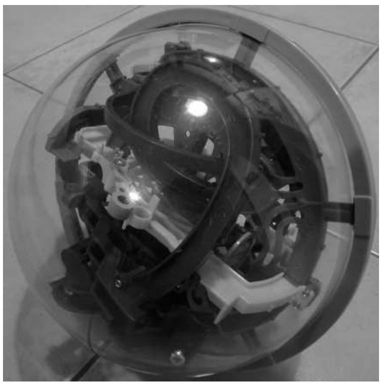
(a) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

(c) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

(d) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

2.2 **(5 pont)** Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



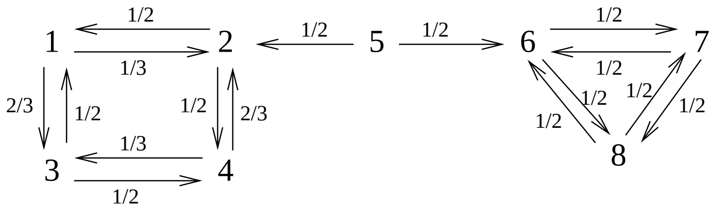
Magical Intellect Ball

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

2.3 **(3 pont)** Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx ?$

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) \approx ?$

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) \approx ?$

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx ?$

2.4 **(5 pont)**

Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

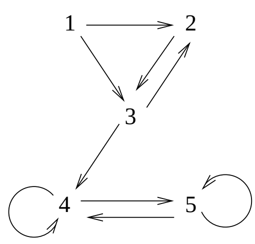
a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!

b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?

c.) A napok hanyad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

2.5 **(3 pont)** Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



3. Generátorfüggvény-módszer

3.1 **(5 pont)** Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X-re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!”. Így az X előáll mint N

darab véletlen szám összege: az i-edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

3.2 **(2 pont)** Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?

(b) Mennyi X várható értéke?

(c) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

3.3 **(2 pont)** Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = c(z + z^2 + z^4 + z^5 + z^8 + z^{11} + z^{13} + z^{15})$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi X várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 8)$ valószínűség?

3.4 **(5 pont)** Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

a.) X generátorfüggvényét,

b.) X várható értékét,

c.) X szórását.

3.5 **(5 pont)** Legye $N \sim Geom(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim Geom(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

3.6 **(4 pont)**

a.) Legyen $X \sim PesszGeom(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\mathbb{V}arY$?

c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim Geom(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\mathbb{V}arZ$ szórásnégyzetet!

3.7 **(4 pont)** Legyen $X \sim Poi(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

3.8 **(4 pont)** Legyen X és Y független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Tudjuk, hogy $X \sim Poi(2)$ és $X + Y \sim Poi(5)$. Mi Y eloszlása?

3.9 **(5 pont)** Legyenek $N \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ és $X_1, X_2, \dots \sim B\left(\frac{1}{3}\right)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

3.10 **(7 pont)** Van egy hamis 1-petákosunk, amin a fej valószínűsége p. Van egy hamis 2-petákosunk, amin a fej valószínűsége q. Egyszerre dobjuk fel mindkettőt, és ezt addig ismételgetjük, amíg a 2-petákoson ki nem jön a fej. Jelölje V azt, hogy ez alatt hányszor dobtunk fejet az 1-petákossal.

a.) Számoljuk ki V eloszlását! *(Tipp: $V = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, ahol N a dobások száma, ξ_i pedig a i-edik alkalommal az 1-petákoson dobott fejek száma (ami persze 0 vagy 1.)) (Eredmény:*

$$\mathbb{P}(V = k) = \begin{cases} A & \text{, } ha\ k = 0 \\ (1-A)L(1-L)^{k-1} & \text{, } ha\ k \geq 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$.)

b.) Számoljuk ki V eloszlásának „farkát", vagyis a $\mathbb{P}(V \geq k)$ valószínűségeket! *(Eredmény:*

$$\mathbb{P}(V \geq k) = \begin{cases} 1 & \text{, } ha\ k = 0 \\ (1-A)(1-L)^{k-1} & \text{, } ha\ k \geq 1 \end{cases}.$$

)

3.11 **(4 pont)** Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0,1)$-re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0,1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0,1]$ intervallumon ne csak konvex, hanem *szigorúan konvex* legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő, hogy $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

4. Diszkrét idejű sorbanállási modellek

4.1 **(5 pont)** A $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$ várakozási idő evolúciós modell mintájára adjuk meg a D_n késleltetés evolúciós egyenletét ugyanabban a FIFO modellben! (Vagyis ahol az egyes igények érkezése között $T_1, T_2, T_3, \ldots$ idők telnek el, az egyes igények kiszolgálása egyesével, érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, S_3, \ldots$.)

4.2 **(5 pont)** Egy könyvelő az asztalán lévő számlakupacból minden délelőtt feldolgoz valahány számlát, éspedig az n-edik nap délelőttjén V_n darabot (de legfeljebb annyit, amennyi van). Az iktatóból minden délután új számlák érkeznek a kupacra: az n-edik nap délutánján Y_n darab.

Jelölje $\hat{X}_n$ a számlakupac méretét az n-edik napon *délben*.

Írjuk fel $\hat{X}_n$ evolúciós egyenletét az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ egyenlet mintájára!

*(Figyelem! Emlékezzünk, hogy X_n a számlakupac mérete volt az n-edik napon **éjfélkor**.)*

4.3 **(9 pont)** Pistike minden délelőtt tönkretesz egy játékautót a kisautós dobozából (már amikor van benne), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután érmedobással dönt arról, hogy elmenjen-e a játékboltba, ha pedig elmegy, akkor megint csak érmedobással dönt arról, hogy 1 vagy 2 játékautót vegyen Pistikének, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba. (Vagyis minden délután $\frac{1}{4}$ val.séggel 1, $\frac{1}{4}$ val.séggel 2 játékautó érkezik.)

a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?

b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?

c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

d.) Tegnap este az anyuka betett egy vagy két autót az *üres* dobozba. Várhatóan (vagyis: várható értékben) hány nap múlva lesz a doboz újra üres?

4.4 **(7 pont)** Jancsika minden délelőtt p valószínűséggel autósat játszik, már ha éppen van kisautója. Ilyenkor tönkretesz két játékautót a kisautós dobozából (illetve, ha csak egy van, akkor azt az egyet), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután vesz egy új kisautót, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba.

a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?

b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?

c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

4.5 **(6 pont)** Egy oktatónak az az elve, hogy minden érkező emailre leghamarabb másnap válaszol, aznap érkezett levélre soha. Az általa tartott kurzus 10 hallgatójának mindegyike minden nap, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel küld egy emailt az oktatónak. (Egy nap egynél több emailt senki sem küld.) Az oktató minden nap pontosan egy hallgatói levélre válaszol (már ha van a postaládájában olyan, ami nem aznapi). Átlagosan hány éjszakát tölt az oktató postaládájában egy hallgatói levél hosszú távon?

4.6 **(6 pont)** Móricka vizsgát felügyel, és közben segít a hallgatóknak. A 10 hallgató között jár körbe-körbe, minden hallgatónál pontosan 1 percet tölt, és ezalatt megválaszol pontosan 1 kérdést, amit a hallgató feltesz (már ha a hallgatónak van kérdése). Minden hallgatónak minden percben, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel jut eszébe egy kérdés (a maradék $\frac{19}{20}$ valószínűséggel egy se). Átlagosan hány perc múlva kap választ Pistike a kérdéseire hosszú távon? *(Az pontosság/egyszerűség kedvéért fel kell tennünk, hogy Pistike minden eszébe jutó kérdéshez az időt Móricka előző látogatásától számítja, így minden kérdés „kiszolgálási ideje” percben mérve* 10*-nek többszöröse.)*

4.7 **(6 pont)** Róbert közrendőrnek 10 parancsnoka van, sorrendben 1., 2., …, 10. számú parancsnok. Minden parancsnok, minden percben, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{20}$ valószínűséggel ad Róbertnek parancsot (mindenki csak 1-et). Ő azonban minden percben csak 1 parancsot tud végrehajtani. Ha több végre nem hajtott parancs is van nála, akkor azt hajtja végre, amelyik a legmagasabb rangú (vagyis legkisebb sorszámú) parancsnoktól jött, a többit halogatja. (Az időt egész percekben mérjük. Tegyük fel, hogy egy parancsot leghamarabb az érkezését követő percben lehet végrehajtani.)

a.) Hosszú távon átlagosan hány végre nem hajtott parancs van Róbert zsebében az 5. számú parancsnokától?

b.) Hosszú távon átlagosan hány perc után hajtja végre Róbert a 5. számú parancsnoktól érkezett parancsokat?

4.8 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1-p$ val.séggel egy sem. A kiszolgálás érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idő mindig pontosan 2.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

4.9 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1-p$ val.séggel nem.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

4.10 **(5 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1-p$ val.séggel nem. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát!

4.11 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1-p$ val.séggel egy sem. A kiszolgálási idő mindig pontosan 2. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát! Küzben gondoljuk át, hogy $\bar{X}_n$ tényleg Markov-e.

4.12 **(7 pont)** Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

a.) Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n-edik nap végén. Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját és számoljuk ki a stacionárius eloszlást!

b.) Legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k-adik tejföl érkezése után! Mi az $\tilde{X}_k$ Markov lánc stacionárius eloszlása? *(Tipp: erre volt előadáson egy tétel.)*

c.) Tegyük fel, hogy Juliska néni a tejfölöket érkezési sorrendben használja el. Legyen D_k a k-adik tejföl által a hűtőben töltött éjszakák száma. Mi a D_k Markov lánc stacionárius eloszlása? *(Tipp: erre is volt előadáson egy tétel.)*

4.13 **(10 pont)** Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n-edik nap végén. Ennek időfejlődése könnyű, és most nem ezzel foglalkozunk.

Hanem: legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k-adik tejföl érkezése után! (Ez persze legalább 1.)

a.) Írjuk fel az $\tilde{X}_k$ Markov lánc átmenetmátrixát! (Nyugodtan feltehetjük, hogy már az általunk „első"-nek számozott tejföl érkezése előtt is voltak tejfölök a hűtőben.)

(Tipp: $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig tervbe vett ragulevesek száma, ami persze pont az elhasznált tejfölök száma, ha van ennyi tejföl. Pont ennek a V-nek az eloszlását számoltuk ki egy másik feladatban.)

(Megoldás:

$$P_{ij} := \mathbb{P}(\tilde{X}_1 = j | \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } j > i+1 \\ A & \text{, ha } j = i+1 \\ (1-A)L(1-L)^{i-j} & \text{, ha } 2 \le j \le i \\ (1-A)(1-L)^{i-1} & \text{, ha } j = 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$.)

b.) Ellenőrizzük le kézzel, hogy $\tilde{X}_k$ stacionárius eloszlása az $\alpha := 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ paraméterű geometriai eloszlás! Vagyis azt kell ellenőrizni, hogy

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij},$$

ahol $\pi_i = \alpha(1-\alpha)^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

(Tipp: csodák csodája, $(1-\alpha)(1-L) = A$.)

4.14 **(5 pont)** Egy zajos csatornán másodpercenként 10^8 bitet tudunk átküldeni. Minden átküldött bit a többitől függetlenül 10^{-6} valószínűséggel sérül. A csatornán csomagokat küldünk át, amik N adatbitből és 64 kísérő bitből állnak. A vevő az esetleges hibákat teljes biztonsággal észleli és „negatív nyugtát” küld róluk, ami teljes biztonsággal megérkezik a küldőhöz. Ilyenkor a teljes csomagot újra kell küldeni. Másodpercenként legfeljebb hány bitnyi adatot lehet a csatornán átvinni hosszú távon, ha N-et jól választjuk meg, és

a.) a csomag elküldése után a nyugta azonnal megérkezik?

b.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg, és meg kell várni, mielőtt a következő csomagot küldeni kezdjük?

c.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg. Mi addig is küldjük a következő csomagokat, de ha negatív nyugta jön, akkor visszaugrunk a hibás csomagra és onnan folytatjuk, a csomagok sorrendjét továbbra is megtartva? *(Tipp: ebben az esetben az optimalizálás csak numerikusan megy. Nem kell túlzásba vinni: ábrázoljuk a kapacitást N függvényében, és olvassuk le a maximumot.)*

5. Poisson-folyamat

5.1 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

(a) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

(b) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

(c) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

5.2 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

5.3 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

5.4 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k-kra)?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

5.5 Egy radioaktív mintában másodpercenkent átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfarészecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy két másodperc hosszú időintervallumban legalább 4 részecskét észlel?

5.6 A radioaktív ^{14}C atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

b.) Veszünk egyetlenegy ^{14}C magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? *(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)*

c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X-szel jelöljük a 3 másodperc alatt *bekövetkező* bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt *észlelt* bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi T eloszlása?

5.7 Egy internetes kiszolgálóhoz percenként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?

b.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?

c.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

6. Laplace-transzformáció

6.1 Legyen $X \sim Exp(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel X Laplace transzformáltját! Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

6.2 Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Mi a Laplace-transzformáltja?

6.3 $X, Y \geq 0$ független valószínűségi változók, $Z = X + Y$, $X \sim Exp(1)$ és $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Mi Y eloszlása?

6.4 Móricka éjjelente hullócsillagokat néz, és óránként átlagosan 4-et lát. Minden hullócsillag, a többitől függetlenül, véletlen ideig látszik. Ez a véletlen idő exponenciális eloszlású, $\frac{1}{10}s$ várható értékkel. Jelöljük X-szel azt az időt, ameddig Móricka 22:00 és 24:00 között hullócsillagot *lát* (másodpercben mérve).

a.) Számoljuk ki X Laplace transzformáltját! (Jelölje L.)

b.) Mennyi $L'(0)$?

c.) Mennyi $L''(0)$?

d.) Mennyi X szórásnégyzete?

(A precízek kedvéért: Elvileg előfordulhat, hogy egyszerre két hullócsillag is látszik, vagy hogy egy hullócsillag felvillanása csak részben esik 22:00 és 24:00 közé (pl. mert 22:00 előtt egy ezredmásodperccel kezdődik). Ezektől nagyvonalúan tekintsünk el.)

6.5 Pistike irodájában reggel 8-tól kezdve óránként átlag 3-szor csörög a telefon, Poisson-folyamat szerint. Pistike valamikor 8:00 és 9:00 között érkezik az irodába, egyenletes eloszlású véletlen időpontban (ami független a telefonhívásoktól). Mi a valószínűsége annak, hogy Pistike egyetlen hívásról sem marad le?

7. Folytonos idejű Markov láncok

7.1 Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

(b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

(c) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja?

(d) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve?

(e) Hosszú távon mennyi lesz Pistike jókedvének időátlaga?

7.2 A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t. Az időt mérjük hónapokban.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünk észnél a rátákkal!*

b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?

d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?

e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

7.3 Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár", illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel".

Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

7.4 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy háromállapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

c.) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?

d.) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?

7.5 Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t ($t \geq 0$) a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

(a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

(b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

(c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

(d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

(e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

7.6 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye

1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben.*

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

7.7 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük **valamelyik**?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?

d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?

e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

7.8 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

7.9 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyereket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

a.) A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.

b.) A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$-a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

7.10 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

f.) A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

7.11 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban akárhány feladat lehet. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?