Tömegkiszolgálás
gyakorló és házi feladatok, 2020 tavasz

1. Elemi valószínűségszámítás

1.1 **(2 pont)** Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X-szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y-nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?

Megoldás:
Jelöljük m-mel egyetlen kockadobás eredményének várható értékét, vagyis $m = \frac{7}{2}$. A teljes várható érték tétel szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{E}(Y|X=k) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k)\,[km] = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k) \cdot k\right] m = m \cdot m = \frac{7}{2}\frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12.25 \end{aligned}$$

1.2 **(2 pont)** Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3 \ldots$-re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim Bin(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$-re számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(Tipp: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.*)*

Megoldás:

Lényeg, hogy $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Mivel az $n \to \infty$ eset érdekel, feltehetjük, hogy $n > k$. Így

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

előre hozzuk, ami látványosan nem függ n-től

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ db}}} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

van egy csomó tényező, ami 1-hez tart

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to$$

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \cdots 1}_{\text{mindegyik 1-hez tart és véges (rögzített) sokan vannak}} \qquad \underbrace{1}_{\text{az alap 1-hez tart, a kitevő fix}}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{k \text{ db}} e^{-\lambda} 1^k = \boxed{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

Hát persze: nagy n-re (és rögzített k-ra) és kicsi p-re a binomiális eloszlás Poissonnal közelíthető.

2. Diszkrét idejű Markov láncok

2.1 **(5 pont)** Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

(a) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

(c) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

(d) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

Megoldás:

(a) Az állapottér legyen $S = 1, 2, 3, 4$, és számozzuk a sarkokat az észanyugatitól kezdve, órajárással ellentétes irányban. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$(P^2)_{11} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

amit persze úgy is el lehet mondani, hogy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ val.séggel marad végig ahol volt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ val.séggel elmegy órairányba aztán visszajön, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ val.séggel pedig fordítva.

(c) Egy óra hosszú idő, közelítsünk a stacionárius eloszlással, vagyis oldjuk meg a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. **A transzponálás nagyon fontos.** Az egyenletrendszer mátrixos alakban, az áttekinthetőség kedvéért néggyel végigszorozva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Innentől

i.) Szabad megsejteni, hogy szimmetria-okból a stacionárius eloszlás az egyenletes, aztán leellenőrizni, hogy a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}$ tényleg kielégíti az egyenletrendszert, *vagy* ii.) szabad észrevenni, hogy az eredeti P mátrixnak nem csak a sorösszegei nullák, hanem az oszlopösszegei is, majd hivatkozni az előadásra, miszerint ilyenkor a stacionárius eloszlás egyenletes (ehhez igazából fel se kell írni az egyenletrendszert), *vagy*

iii.) szabad megoldani az egyenletrendszert.

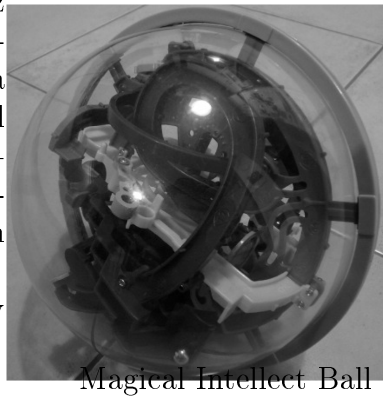
Mindenképpen arra jutunk, hogy $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. A feladat kérdésére a válasz $\pi_3 = \frac{1}{4}$.

(d) Legyen $f : S \to \{0; 1\}$ a napon levés indikátorfüggvénye, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } x = 4, \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon $\sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi_1 + \pi_4 = \frac{1}{2}$.

2.2 **(5 pont)** Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik", és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



Magical Intellect Ball

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

Megoldás:

a.) Az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapottérrel

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b.) Keressük a π stacionárius eloszlást, amihez megoldjuk a $(P - I)^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

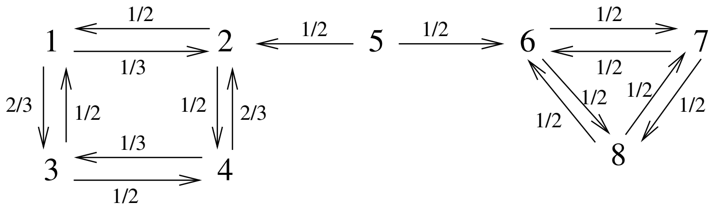
Ennek megoldása az $\sum_{i \in S} \pi_i$ normálási feltételt is figyelembe véve

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

vagyis a Markov lánc a 0 állapotban van legtöbbször (hát persze), éspedig az ergodtétel értelmében hosszú távon a lépések $\frac{4}{10}$-ében. (A lánc irreducibilis és aperiodikus, az ergodtételt az egyes állapotok indikátorfüggvényeire alkalmazhatjuk.)

c.) A lépések $\frac{4}{10}$-ében próbálkozik Móricka az 1-es akadállyal, ezen belül mindig $\frac{1}{4}$ val.séggel bukik el, vagyis a lépések $\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$-ében éppen az 1-es akadályt bukja. Hasonlóan a 2-es és 3-as akadályt is a lépések $\frac{1}{10}$-ében bukja, vagyis **hosszú távon mindhárom akadályon ugyanannyiszor, az összes bukás $\frac{1}{3}$-ában bukik.**

2.3 **(3 pont)** Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 6) \approx ?$

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 1) \approx ?$

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 6) \approx ?$

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 5) \approx ?$

Megoldás: A Markov lánc NEM irreducibilis. Három osztálya közül kettő zárt: a $C_1 := \{1, 2, 3, 4\}$ osztály periódusa 2, a $C_2 := \{6, 7, 8\}$ osztály pedig aperiodikus, mert pl. 6-bó 6-ba vissza lehet jutni 2 és 3 lépésben is. Így

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 6) \approx \frac{1}{3}$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban. A Markov lánc ide megszorítva irreducibilis és aperiodikus, így a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az eloszlás a stacionáriussal közelíthető. A C_2 irreducibilis komponensen a(z egyetlen) π stacionárius eloszlás szimmetria okból az egyenletes, így $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 6) \approx \pi_7 = \frac{1}{3}$.

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 1) = 0$, mert 1-ből indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, ez viszont periodikus 2 periódussal, így páros sok lépésben csak 1-be és 3-ba juthatunk el.

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 6) = 0$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, vagyis 2-be nem lehet eljutni.

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 5) \approx \frac{1}{6}$, mert 5-ből indulva $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az első lépésben a C_1 osztályba lépünk és ott is ragadunk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel viszont a C_2-be, és innen kezdve az a.) pont szerinti $\frac{1}{3}$ az esélyünk hosszú idő alatt 7-be érkezni.

2.4 **(5 pont)**

Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!

b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?

c.) A napok hanyad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

Megoldás:

a.) Jelöljük az állapotokat számokkal, mondjuk 1: vörös; 2: narancs; 3: barna. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b.) Jelöljük a Markov láncot X_n-nel. Ha mondjuk május 1-e a nulladik nap, akkor május 5-e a negyedik, vagyis a kérdés $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) =$? Ez a P^4 mátrix $(1,1)$ eleme: $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = P^4_{11}$. Ezt kiszámolhatjuk mondjuk úgy, hogy $P^4 = \left(P^2\right)^2$, Ebből persze nem kell minden elemet kiszámolni - ami nem kell, $*$-gal jelölöm:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{144} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ebből $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = P^4_{11} = \frac{7}{144} \approx 0.048611$.

c.) Az ergodtételt fogjuk használni, ehhez szükség van a Markov lánc stacionárius eloszlására. (Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy stacionárius eloszlása van.) Meg kell oldanunk a $(P^T - I)\pi^T$ homogén lineáris egyenletrendszert. A szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{6} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

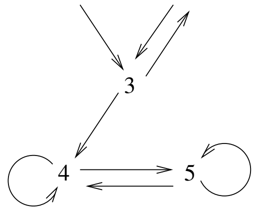
Ennek egy lehetséges megoldása pl. $\tilde{\pi} = (6\,11\,12)$, egyetlen normált megoldása pedig

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{29} & \frac{11}{29} & \frac{12}{29} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.20690 & 0.37931 & 0.41379 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtételt az egyes állapotok indikátoraira alkalmazva azt kapjuk, hogy az i állapotban hosszú távon az idő π_i hányadát tölti. Vagyis Juliska körme az idő $\pi_1 \approx 20.7\%$-ában vörös, $\pi_2 \approx 37.9\%$-ában naracs és $\pi_3 \approx 41.4\%$-ában barna.

2.5 **(3 pont)** Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



Megoldás:

osztály	zártság	lényegesség	visszatérés	periódus
$\{1\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞, vagy nincs
$\{2;3\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
$\{4;5\}$	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

Érdemes megjegyezni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunikál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \leftrightsquigarrow j$ reláció („i kommunikál j-vel") egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapottér minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞, vagy nem definiált.

3. Generátorfüggvény-módszer

3.1 **(5 pont)** Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X-re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!". Így az X előáll mint N darab véletlen szám összege: az i-edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

1. megoldás, a segítség szerint:

Móricka egy „kísérlete" álljon azokból a dobásokból, amíg sikerül neki egy 6-ost dobni, *és még az azt követő dobásból.* Ha ez az utolsó dobás 6-os, akkor vége, ha pedig nem 6-os, akkor jön a következő kísérlet. Jelölje Y_i az i-edik kísérlet hosszát. Így

$$X = \sum_{i=i}^{N} Y_i,$$

Y_i pedig 1-gyel több, mint a hatos megdobásához szükséges dobások száma, vagyis $Y_i = Z_i + 1$, ahol Z_i geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel (hagyományos optimista geometriai eloszlás), és $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ függetlenek egymástól és N-től is.

A Z_i-k generátorfüggvénye

$$g_Z(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{1 - \frac{5}{6}z} = \frac{z}{6 - 5z},$$

az Y_i-k generátorfüggvénye ennek z-szerese:

$$g_Y(z) = \frac{z^2}{6 - 5z}.$$

Az N maga is geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így generátorfüggvénye

$$g_N(z) = g_Z(z) = \frac{z}{6 - 5z}.$$

A véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{\frac{z^2}{6-5z}}{6 - 5\frac{z^2}{6-5z}} = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

A várható értéket számolhatnánk ennek deriválásával, de azt is tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+1\right) = 6\cdot 7 = 42.$$

2. megoldás, tök másképp (jobb, általánosítható megoldás):
Legyen g az X generátorfüggvénye, g_1 pedig a hátralévő dobások számának (X_1-nek) a generátorfüggvénye akkor, ha a legutóbbi dobás 6-os volt, de az azelőtti nem. Ezek között keresünk összefüggéseket a teljes várható érték tétellel.

g-re felírunk egy teljes várható érték tételt aszerint, hogy mi az első dobás eredménye. Ha 6-ost dobunk, akkor még X_1 dobás van hátra, ha pedig mást, akkor kezdődik minden elölről:

$$\mathbb{E}(z^X) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^X \,|\, 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^X \,|\, \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^{1+X_1}) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

ahol X' azonos eloszlású X-szel. Így

$$g(z) = \frac{1}{6}zg_1(z) + \frac{5}{6}zg(z). \tag{1}$$

Ugyanígy felírjuk a teljes várható érték tételt g_1-re is a soron következő dobás eredménye szerint. Ha 6-ost dobunk, akkor vége, ha pedig mást, akkor kezdődik minden elölről:

$$\mathbb{E}(z^{X_1}) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^{X_1} \,|\, 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^{X_1} \,|\, \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^1) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

vagyis

$$g_1(z) = \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z). \tag{2}$$

A (2) egyenletet (1)-be visszaírva

$$g(z) = \frac{1}{6}z\left[\frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z)\right] + \frac{5}{6}zg(z),$$

amit megoldva

$$g(z) = \frac{\frac{1}{36}z^2}{1-\frac{5}{6}z-\frac{5}{36}z^2} = \frac{z^2}{36-30z-5z^2}.$$

A várható érték ennek deriválásával kapható meg:

$$g'(z) = \frac{72z-30z^2}{(36-30z-5z^2)^2}, \quad \text{így} \quad \mathbb{E}X = g'(1) = 42.$$

3.2 **(2 pont)** Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?

(b) Mennyi X várható értéke?

(c) Mennyi a $\mathbb{P}(X=2)$ valószínűség?

Megoldás:

(a) Minden generátorfüggvényre igaz, hogy $g(1) = 1$, ezért

$$g(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + c \cdot 1^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + c = 1,$$

amiből $c = \frac{1}{8}$. Ebből

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3$$

(b) Mint mindig, $\mathbb{E}X = g'(1)$. Ehhez

$$g'(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2z + \frac{1}{8} \cdot 3z^2,$$

amiből

$$\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{11}{8} = 1.375.$$

(c) Mint mindig, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{g''(0)}{2!}$. Esetünkben $g''(0) = \frac{3}{4}$, amiből

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\frac{3}{4}}{2!} = \frac{3}{8}.$$

Alternatív megoldás: A generátorfüggvényből kiolvasható X eloszlása: $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ jelöléssel

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3,$$

amiből $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = c$, és a többi k-ra $p_k = 0$. Így persze

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ miatt $c = \frac{1}{8}$.

(b) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$.

(c) $\mathbb{P}(X = 2) = p_2 = \frac{3}{8}$.

3.3 **(2 pont)** Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = c(z + z^2 + z^4 + z^5 + z^8 + z^{11} + z^{13} + z^{15})$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi X várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 8)$ valószínűség?

Megoldás:

a.) $g(1) = 1$ mindig, vagyis $c = \frac{1}{8}$.

b.) $\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{8}(1 + 2z + 4z^3 + 5z^4 + 8z^7 + 11z^{10} + 13z^{12} + 15z^{14}) \mid_{z=1} = \frac{59}{8} = 7.375$.

Avagy: a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ generátorfüggvényből leolvasható az X eloszlása:

k	1	2	4	5	8	11	13	15
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

amiből szintén könnyen $\mathbb{E}X = \frac{1+2+4+5+8+11+13+15}{8} = \frac{59}{8} = 7.375$.

c.) $\mathbb{P}(X = 8) = p_8$ a z^8 együtthatója a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ sorfejtésben, vagyis esetünkben $\mathbb{P}(X = 8) = \frac{1}{8}$.

3.4 **(5 pont)** Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

a.) X generátorfüggvényét,

b.) X várható értékét,

c.) X szórását.

Megoldás:
Jelöljük N-nel a dobások számát, az utolsó 6-ost nem beleértve, vagyis $X \sim Geom(p = \frac{1}{6})$ (pesszimista). Így N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{p}{1-qz} = \frac{1}{6-5z}$ (a szokásos $q = 1 - p$ jelöléssel).

A keresett Y egy *véletlen tagszámú összeg*, éppen N taggal: $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, ahol $Y_1, Y_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, mégpedig egyenletes eloszlásúak az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. (*Figyelem*: az Y_i-k tényleg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon egyenletesek, és *nem* az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$-on, mert az Y_i eloszlása egy kockadobás eredményének *feltételes eloszlása* azon feltétel mellett, hogy az eredmény nem 6-os.)

Ezek szerint az Y_i-k generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5}{5} = \frac{1}{5}\frac{z - z^6}{1 - z},$$

így

a.) a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $g_X = g_n \circ g_Y$, vagyis

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{6 - (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)} = \frac{1}{6 - \frac{z-z^6}{1-z}}.$$

b.) A várható értéket számolhatnánk a generátorfüggvény deriválásával is, de előadásról azt is tudjuk, hogy a véletlen tagszámú összegre $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} - 1 = 5$, $\mathbb{E}Y_i = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, vagyis $\mathbb{E}X = 5 \cdot 3 = 15$.

c.) A szórást megintcsak számolhatnánk a generátorfüggvény deriváltjaiból, de előadásról azt is tudjuk, hogy $D^2X = D^2N(\mathbb{E}Y_i)^2 + \mathbb{E}ND^2Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = 5$, $\mathbb{E}Y_i = 3$, továbbá az eloszlástáblázat szerint $D^2N = \frac{q}{p^2} = 30$ és $D^2Y_i = \frac{5^2-1}{12} = 2$. Így $D^2X = 30 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2 = 280$, $DX = \sqrt{280} \approx 16.73$.

3.5 **(5 pont)** Legye $N \sim Geom(p)$ és $X_1, X_2, \cdots \sim Geom(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

N generátorfüggvénye $g_N(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$

Az X_i-k generátorfüggvénye $g_X(z) = \dfrac{qz}{1-(1-q)z}$

$\xrightarrow[\text{volt}]{\text{tétel}}$ S_N generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \frac{p\,\frac{qz}{1-(1-q)z}}{1-(1-p)\frac{qz}{1-(1-q)z}} \underset{[1-(1-q)z]\text{-vel}}{\overset{\text{bővítem}}{=\!=\!=}}$$

$$= \frac{pqz}{1-(1-q)z-(1-p)qz} = \frac{pqz}{1-[1-\cancel{q}+\cancel{q}-pq]z},$$

amiből látszik, hogy $\boxed{S_N \sim Geom(pq)}$

Hát persze: Móricka hamis dobókockáján a 6-os val-sége p, Pistikéén pedig q. Addig dobálják a két kockát egyszerre, amíg ki nem jön a 6-os mindkettőn egyszerre-egyszerre, amíg ki nem jön a 6-os. Legyen N, hogy hányszor kiált fel ~~Móricka~~ Pistike, hogy „Nekem ~~már~~ megvan"! Legyen X_i az i-edik ilyen „részsikerhez" szükséges dobások száma. Látszik, hogy $N \sim Geom(p)$ és $X_i \sim Geom(q)$ függetlenek, és a játék teljes hossza S_N.

3.6 **(4 pont)**

a.) Legyen $X \sim PesszGeom(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\mathbb{V}arY$?

c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim Geom(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\mathbb{V}arZ$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

a.) $k = 0, 1, 2 \ldots$ -re $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k p \overset{q:=1-p}{=\!=\!=} q^k p$,

így X generátorfüggvénye

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k \overset{\text{mértani}}{\underset{\text{sor}}{=\!=\!=}}$$

$$= p \frac{1}{1-qz} = \underline{\underline{\frac{p}{1-qz}}} = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

Ebből $g_X'(z) = \left[p(1-qz)^{-1}\right]' = -p(1-qz)^{-2}(-q) = \dfrac{pq}{(1-qz)^2}$

$$g_X''(z) = \left[pq(1-qz)^{-2}\right]' = -2pq(1-qz)^{-3}(-q) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3}$$

$\Rightarrow$ $g_X'(1) = \dfrac{pq}{(1-q)^2} = \dfrac{pq}{p^2} = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1-p}{p} = \underline{\underline{\dfrac{1}{p} - 1}}$

$$g_X''(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \underline{\underline{\frac{2q^2}{p^2}}}$$

Ebből $\boxed{\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1}$

$$\boxed{\mathbb{V}ar\,X} = g_X''(1) + g_X'(1) - \left[g_X'(1)\right]^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{2q^2 + qp - q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2 + qp}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \boxed{\frac{q}{p^2}}$$

b.) $\mathbb{E}X = 1$, $\mathbb{E}X^2 = 1$, ebből $\mathbb{V}ar\, X = 0$, hát persze.

c.) $$\boxed{\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = \left(\frac{1}{p}-1\right)+1 = \frac{1}{p}}$$

$$\mathbb{V}ar\, Z = \mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}ar\, X + \mathbb{V}ar\, Y, \quad \boxed{\text{MERT } X \text{ ÉS } Y \text{ FÜGGETLENEK}}$$

$$= \frac{q}{p^2} + 0 = \boxed{\frac{q}{p^2}}$$

Hát persze: az $Y \equiv 1$ determinisztikus, így minden val. változótól független.

[Megj: Ez így könnyebb, mint $g_Z(z) = \dfrac{pz}{1-qz}$ -t kétszer lederiválni.]

3.7 **(4 pont)** Legyen $X \sim Poi(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,2,\ldots$-re, ezért

X generátorfüggvénye

$$\underline{\underline{g_X(z)}}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)z^k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}z^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}=$$

definíció szerint

$$\stackrel{\text{definíció szerint}}{=\!=}e^{-\lambda}e^{\lambda z}=\underline{\underline{e^{\lambda(z-1)}}}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Ebből $g_X'(z)=\lambda e^{\lambda(z-1)} \Rightarrow g_X'(1)=\lambda$

$g_X''(z)=\lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \Rightarrow g_X''(1)=\lambda^2$

tehát $\boxed{\mathbb{E}X=g_X'(1)=\lambda}$

$\boxed{\mathrm{Var}\,X=g_X''(1)+g_X'(1)-[g_X'(1)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda}$

[Amiből persze a szórás $\sqrt{\mathrm{Var}\,X}=\sqrt{\lambda}$.]

3.8 **(4 pont)** Legyen X és Y független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Tudjuk, hogy $X\sim Poi(2)$ és $X+Y\sim Poi(5)$. Mi Y eloszlása?

Megoldás:

Legyen $Z = X + Y$, és legyen X, Y, Z generátorfüggvénye rendre g_X, g_Y, g_Z.

Ezekről tudjuk, hogy

$g_X(z) = e^{2(z-1)}$, mert $X \sim Poi(2)$

$g_Z(z) = e^{5(z-1)}$, mert $Z \sim Poi(5)$

$g_Z(z) = g_X(z) g_Y(z)$, mert $Z = X + Y$ és X, Y ~~független~~ függetlenek.

Ebből $g_Y(z) = \dfrac{g_Z(z)}{g_X(z)} = \dfrac{e^{5(z-1)}}{e^{2(z-1)}} = e^{3(z-1)}$,

ami ~~éppen~~ éppen a $Poi(3)$ eloszlás generátorfüggvénye $\Longrightarrow$ $\boxed{Y \sim Poi(3)}$

3.9 **(5 pont)** Legyenek $N \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ és $X_1, X_2, \dots \sim B\left(\frac{1}{3}\right)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

$N \sim Bin(10, \frac{1}{2})$, ezért N generátorfüggvénye

$$g_N(z) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z\right)^{10} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z\right)^{10}.$$

$X_1, X_2, \ldots \sim B(\frac{1}{3})$, ezért a közös generátorfüggvényük

$$g_X(z) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} z.$$

Ebből a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} z\right]\right)^{10} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6} z\right)^{10},$$

ami éppen a $Bin(10, \frac{1}{6})$ eloszlás generátorfüggvénye,

tehát $S_N \sim Bin(10, \frac{1}{6})$.

[Hát persze: 10-szer feldobunk egy szabályos érmét. Amikor az eredmény „fej", eldobunk egy szabályos dobókockát is, és megnézzük, hogy sikerül-e páros számot dobni. $X_i := \begin{cases} 1, \text{ ha az } i\text{-edik kockadobás páros} \\ 0, \text{ ha nem} \end{cases}$

$N :=$ a dobott fejek száma.

Így S_N a dobott páros számok száma, persze $\sim Bin(10, \frac{1}{6})$]

3.10 **(7 pont)** Van egy hamis 1-petákosunk, amin a fej valószínűsége p. Van egy hamis 2-petákosunk, amin a fej valószínűsége q. Egyszerre dobjuk fel mindkettőt, és ezt addig ismételgetjük, amíg a 2-petákoson ki nem jön a fej. Jelölje V azt, hogy ez alatt hányszor dobtunk fejet az 1-petákossal.

a.) Számoljuk ki V eloszlását! *(Tipp: $V = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, ahol N a dobások száma, ξ_i pedig a i-edik alkalommal az 1-petákoson dobott fejek száma (ami persze 0 vagy 1.)) (Eredmény:*

$$\mathbb{P}(V = k) = \begin{cases} A & \text{, ha } k = 0 \\ (1-A)L(1-L)^{k-1} & \text{, ha } k \geq 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$.)

b.) Számoljuk ki V eloszlásának „farkát", vagyis a $\mathbb{P}(V \geq k)$ valószínűségeket! *(Eredmény:*

$$\mathbb{P}(V \geq k) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } k = 0 \\ (1-A)(1-L)^{k-1} & \text{, ha } k \geq 1 \end{cases}.$$

)

Megoldás:

Legyen $N, \xi_1, \xi_2 \dots$ a feladat-beli tipp szerint.

Ekkor persze $N \sim Geom(q)$, $\xi_1, \xi_2, \dots \sim B(p)$ és mind teljesen függetlenek, ezért $V = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$ véletlen tagszámú összeg.

N generátorfüggvénye $g_N(z) = \dfrac{qz}{1-(1-q)z}$

$\xi_1, \xi_2 \dots$ generátorfüggvénye $g_\xi(z) = 1-p+pz$

amiből V generátorfüggvénye

$$g_V(z) = g_N(g_\xi(z)) = \frac{q(1-p+pz)}{1-(1-q)(1-p+pz)}$$

a.) V eloszlásának kiszámolásához $g_V(z)$-t kell sorbafejteni. Ehhez könnyebbség, hogy g_V hasonlít egy geometriai eloszlás generátorfüggvényéhez, aminek a sorfejtését deriválás nélkül is tudjuk (hiszen az együtthatók éppen a valószínűségek). Írjuk hát $g_V(z) = A + Bz \dfrac{1}{1-Mz}$ alakba.

~~$g_V(z) = \frac{q(1-p)+qpz}{}$~~

Persze $A = g_V(0) = \dfrac{q(1-p)}{1-(1-q)(1-p)} = \dfrac{q-qp}{p+q-qp}$, ezt célszerű kiemelni:

bocs, ez $\boxed{\text{számolós lesz!!}}$

$$g_v(z) = \frac{q-qp}{p+q-qp} \; \frac{1-\frac{p}{1-p}z}{1-\frac{p(1-q)}{p+q-qp}z} = \frac{q-qp}{p+q-qp}\left[1+\frac{\frac{p}{1-p}+\frac{p(1-q)}{p+q-qp}}{1-\frac{p(1-q)}{p+q-qp}\cancel{z}}z\right]$$

$$= \frac{q-qp}{p+q-qp} + \frac{z}{1-\frac{p-pq}{p+q-qp}} \; \frac{q(1-p)}{p+q-qp}\, p\left[\frac{1}{1-p}+\frac{1-q}{p+q-qp}\right]$$

$$= \frac{q-qp}{p+q-qp} + \frac{z}{1-\frac{p-pq}{p+q-qp}} \; \frac{pq}{p+q-qp}\underbrace{\left[1+\frac{(1-p)(1-q)}{p+q-qp}\right]}_{\frac{p+q-qp+1-p-q+qp}{p+q-qp} = \frac{1}{p+q-qp}}$$

$$= \frac{q-qp}{p+q-qp} + \frac{pq}{(p+q-qp)^2} \; \frac{z}{1-\frac{p-pq}{p+q-qp}}$$

Legyen $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$, $M = \frac{p-pq}{p+q-qp}$, $L = 1-M = \frac{q}{p+q-qp}$,

így $1-A = \frac{p}{p+q-qp}$, és ezekkel a jelölésekkel

$$\boxed{g_v(z) = A + (1-A)L\frac{z}{1-Mz}}.$$

Innen a sorfejtés már könnyű:

$$\frac{1}{1-Mz} = 1 + Mz + (Mz)^2 + (Mz)^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow g_v(z) = A + (1-A)Lz + (1-A)LMz^2 + (1-A)LM^2z^3 + \ldots$$

Vagyis

$$g_V(z) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (1-A)L(1-L)^{k-1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V=k) z^k$$

amiből $\boxed{\mathbb{P}(V=k) = \begin{cases} A, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)L(1-L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}}$

[Még egyszer: $A = \dfrac{q-qp}{p+q-qp}$, $L = \dfrac{q}{p+q-qp}$]

b.) Persze, ha $k=0$, akkor $\mathbb{P}(V \geq k) = \mathbb{P}(V \geq 0) = 1$.

Ha pedig $k \geq 1$, akkor

$$\mathbb{P}(V \geq k) = \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbb{P}(V=\ell) = \sum_{\ell=k}^{\infty} (1-A)L(1-L)^{\ell-1} \overset{M:=1-L}{=\!=\!=}$$

$$= (1-A)L(1-L)^{k-1} \underbrace{(1+M+M^2+\ldots)}_{\frac{1}{1-M} = \frac{1}{L}} = (1-A)(1-L)^{k-1}$$

vagyis $\boxed{\mathbb{P}(V \geq k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)(1-L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}}$

3.11 **(4 pont)** Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0, 1)$-re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0, 1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0, 1]$ intervallumon ne csak konvex, hanem *szigorúan konvex* legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő, hogy $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

Megoldás:

$$g(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + \ldots$$

$$g'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + 4p_4 z^3 + \ldots$$

$$g''(z) = 2p_2 + 3\cdot 2\cdot p_3 z + 4\cdot 3\cdot p_4 z^2 + \ldots$$

Mivel $p_2, p_3, p_4 \ldots \geq 0$, ezért $z > 0$ esetén $g''(z)$ csak úgy lehet nulla, ha $p_2 = p_3 = p_4 = \ldots = 0$.

Vagyis p_0 és p_1 kivételével minden p_k-nak nullának kell lenni, hogy $g''(z) = 0$ lehessen.

~~Ah~~ Ezek persze pontosan akkor nullák, ha X csak 0 vagy 1 lehet, vagyis <u>Bernoulli</u> eloszlású.

<u>Röviden:</u> $g(z)$ <u>szigorúan</u> konvex $[0,1]$-en, hacsak nem $X \sim B(p)$ valamilyen $p \in [0,1]$-re, mely esetben persze $g(z)$ lineáris vagy konstans.

4. Diszkrét idejű sorbanállási modellek

4.1 **(5 pont)** A $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$ várakozási idő evolúciós modell mintájára adjuk meg a D_n késleltetés evolúciós egyenletét ugyanabban a FIFO modellben! (Vagyis ahol az egyes igények érkezése között $T_1, T_2, T_3, \ldots$ idők telnek el, az egyes igények kiszolgálása egyesével, érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, S_3, \ldots$.)

Megoldás:

Tudjuk, hogy $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$

A késleltetés $D_n = W_n + S_n$, így

$$D_{n+1} = W_{n+1} + S_{n+1} = (\underbrace{W_n + S_n}_{D_n} - T_{n+1})_+ + S_{n+1}$$

vagyis $\boxed{D_{n+1} = (D_n - T_{n+1})_+ + S_{n+1}}$

4.2 **(5 pont)** Egy könyvelő az asztalán lévő számlakupacból minden délelőtt feldolgoz valahány számlát, éspedig az n-edik nap délelőttjén V_n darabot (de legfeljebb annyit, amennyi van). Az iktatóból minden délután új számlák érkeznek a kupacra: az n-edik nap délutánján Y_n darab.

Jelölje $\hat{X}_n$ a számlakupac méretét az n-edik napon *délben*.

Írjuk fel $\hat{X}_n$ evolúciós egyenletét az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ egyenlet mintájára!

*(Figyelem! Emlékezzünk, hogy X_n a számlakupac mérete volt az n-edik napon **éjfélkor**.)*

Megoldás:

Az n-edik napon délben a kupac mérete $\hat{X}_n$.

Ehhez délután jön még Y_n darab, így éjfélre a kupac mérete $\hat{X}_n + Y_n$.

Másnap délelőtt ebből feldolgoz V_{n+1} darabot (ha van annyi — persze a kupac mérete minuszba nem mehet), így délre marad $\boxed{\hat{X}_{n+1} = (\hat{X}_n + Y_n - V_{n+1})_+}$

Alternatív megoldás: Tudjuk, hogy $X_n = \hat{X}_n + Y_n$

és $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$, amiből

$$\boxed{\hat{X}_{n+1} + \cancel{Y_{n+1}} = (\hat{X}_n + Y_n - V_{n+1})_+ + \cancel{Y_{n+1}}}$$

4.3 **(9 pont)** Pistike minden délelőtt tönkretesz egy játékautót a kisautós dobozából (már amikor van benne), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután érmedobással dönt arról, hogy elmenjen-e a játékboltba, ha pedig elmegy, akkor megint csak érmedobással dönt arról, hogy 1 vagy 2 játékautót vegyen Pistikének, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba. (Vagyis minden délután $\frac{1}{4}$ val.séggel 1, $\frac{1}{4}$ val.séggel 2 játékautó érkezik.)

a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?

b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?

c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

d.) Tegnap este az anyuka betett egy vagy két autót az *üres* dobozba. Várhatóan (vagyis: várható értékben) hány nap múlva lesz a doboz újra üres?

Megoldás:

Pistike doboza tulajdonképpen egy kiszolgálási sor:
a „kiszolgálás" az, amikor Pistike lenyullázza a járművet.
Így ha X_n a dobozban a kisautók száma az n-edik napon éjfélkor, akkor ez pont az előadásbeli

$$X_{n+1} = \left(X_n - V_{n+1}\right)_+ + Y_{n+1}$$

sorhossz-evolúciós egyenlet szerint fejlődik, ahol
$V_n \equiv 1$ az n-edik délelőtt tönkretett kisautók száma
(már ha van ennyi),
Y_n pedig az n-edik napon érkező kisautók száma.

Ennek eloszlása

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

Ebből $\mathbb{E}V = 1$, $\mathbb{E}Y = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{3}{4}$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} Y = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}.$$

~~Legyen π az X_n Markov-lánc egyetlen stacionárius eloszlása~~

Mivel $\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V$, és nincs periodicitás, X_n stabil.

Legyen ~~X~~ Π az X_n Markov-lánc egyetlen stacionárius eloszlása: $X^{stac} \sim \Pi$.

a.) Az ergodtétel miatt hosszú távon a 0 állapot részaránya az időből $\Pi_0 = \mathbb{P}(X^{stac} = 0)$.

A 7. előadásjegyzet 6. oldal tétele szerint

$$\Pi_0 = \mathbb{P}(X^{stac} = 0) = 1 - \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V} \overset{\text{esetünkben}}{=\!=} 1 - \frac{3/4}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

[A tétel alkalmazásához kellett, hogy $V \in \{0,1\}$.]

c.) A 7. előadás 2. oldal tétele szerint stacionárius állapotban a sorhossz várható értéke

$$\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y) + \mathrm{Var}\,Y}{2(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)} = \frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right) + \frac{11}{6}}{2\left(1-\frac{3}{4}\right)} = \frac{7}{4}.$$

A Little formula szerint pedig az átlagos várakozási idő (vagyis átlagosan a dobozban töltött éjszakák száma)

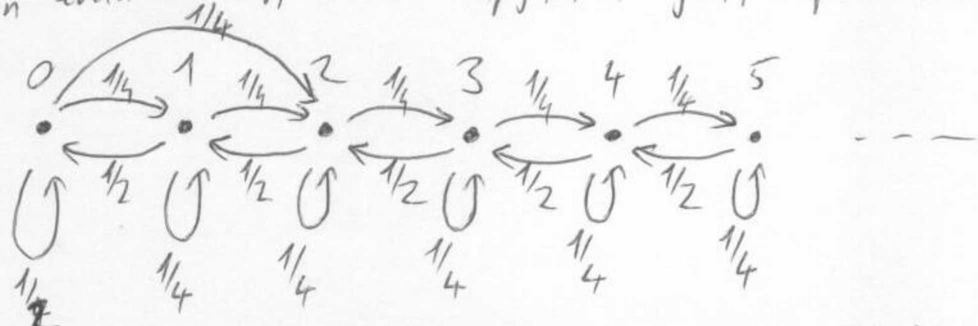
$$\boxed{\bar{D} = \frac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y} = \frac{7/4}{3/4} = \frac{7}{3}}$$

d.) A 7. előadásjegyzet 7. oldal tétele szerint a foglaltsági periódus hosszának várható értéke

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\begin{matrix}\text{foglaltsági periódus}\\ \text{hossza}\end{matrix}\right) = \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{P}(Y \geq 1)(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)} = \frac{3/4}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)} = 6}$$

b.) Ehhez sajnos ki kell számolni a stacionárius eloszlást.

X_n evolúciós egyenlete alapján a gráf-reprezentáció:



Vegyük észre, hogy X_n majdnem születési-halálozási folyamat: csak akkor változhat kettővel, ha $X_n = 0$ (így nincs mit tönkretenni), és 2 autó érkezik.

Így a $0 \leftrightarrow 1$ és $1 \leftrightarrow 2$ él kivételével érvényes a szül-hal folyamatok stac. eloszlására érvényes gondolatmenet: $\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}$ ha $i \geq 2$,

vagyis $\pi_i \cdot \frac{1}{4} = \pi_{i+1} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{1}{2}\pi_i$ $(i \geq 2)$.

A maradék 3 ismeretlenre (π_0, π_1, π_2) felírhatjuk a stacionaritást kézzel:

$$(*)\quad \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}}\pi_2 \end{cases}$$

Hurrá, ez nem új ismeretlen, $\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2$

Mátrix-alakban

$$\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2\end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}^{A}$$

amiből $(A^T - I)\begin{pmatrix}\pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2\end{pmatrix} = 0$, vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ vagyis $\boxed{\pi_0 = \pi_1 = \pi_2}$.

[Hát persze: a ⊛ rendszer első egyenletéből $\pi_0 = \pi_1$, a 2. és 3. egyenlet jobboldala pedig ugyanaz, így $\pi_1 = \pi_2$]

[Hát persze: Az A mátrix bisztochasztikus, vagyis nem csak a sorösszegek 1-ek, hanem az oszlopösszegek is, így az $(1\ 1\ 1)$ baloldali sajátvektora a $\lambda = 1$ sajátértékhez: $(1\ 1\ 1)A = (1\ 1\ 1)$]

Így a stac. eloszlás

$$\Pi = \Pi_0 \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \cdots \right)$$

Normálás: $1 = \Pi_0 \left(1 + 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots}_{1} \right) = 4\Pi_0$

$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{1}{4}$,

$$\boxed{\Pi = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \cdots \right)}$$

Végre válaszolhatunk a b.) kérdésre:

legyen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \geq 3 \\ 0, & \text{ha } i = 0, 1, 2 \end{cases}$

annak indikátora, hogy a dobozban 2-nél több autó van: $f(X_0) + f(X_1) + \ldots + f(X_{n-1})$ azt adja meg, hogy az első n éjszakából hányszor volt 2-nél több autó.

Az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga 1 valséggel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_0) + \ldots f(X_{n-1})}{n} = \mathbb{E}_\Pi f = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i f(i),$$

vagyis a keresett arány

$$\mathbb{E}_\Pi f = \sum_{i=3}^{\infty} \Pi_i = \mathbb{P}(X^{stac} \geq 3) = 1 - (\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

4.4 **(7 pont)** Jancsika minden délelőtt p valószínűséggel autósat játszik, már ha éppen van kisautója. Ilyenkor tönkretesz két játékautót a kisautós dobozából (illetve, ha csak egy van, akkor azt az egyet), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután vesz egy új kisautót, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba.

a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?

b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?

c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

Megoldás:

a.) 0, hiszen a doboz éjszaka soha nem üres: minden délután érkezik egy kisautó.

b.) Pistike doboza egy kiszolgálási sor, kiszolgálás = kidobás. Legyen X_n a dobozban a kisautók száma (= sorhossz) az n. napon éjfélkor.

Az előadás-beli $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ sorhossz evolúciós egyenlet érvényes,

$Y \equiv 1$ az érkező autók = igények száma $\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}Y = 1}$

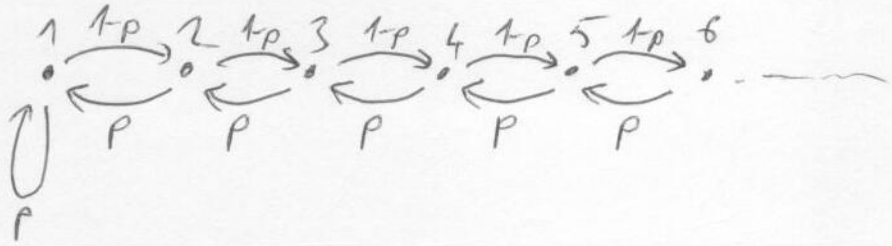
az n-edik napi „kiszolgálási kapacitás" $V_n \sim V$

eloszlása

k	0	1	2
$\mathbb{P}(V=k)$	$1-p$	0	p

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}V = 2p}$

Ez alapján az X_n gráf-reprezentációja



Ez születési-halálozási folyamat: egyetlen stac. eloszlása az a π, amire $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{1-p}{p} =: \alpha$ $i = 1,2,3 \dots$

vagyis $\pi = \pi_0 (1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^3 \dots)$, már persze ha ez normálható.

Vagyis X_n stabil $\iff \alpha = \frac{1-p}{p} < 1 \iff p > \frac{1}{2}$.

[Hát persze: a stabilitás feltétele (irreducibilis & aperiodikus esetben $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y$, vagyis $2p > 1$.]

A stabil esetben rögtön látszik, hogy

$$X^{stac} \sim \Pi = Geom(1-\alpha)$$

$q := 1-p$ jelöléssel $1-\alpha = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$

Az ergodtétel miatt a b.) kérdésre a válasz

b.)

$$\mathbb{P}(X^{stac} \geq 3) = 1 - (\Pi_1 + \Pi_2) = 1 - (\alpha + \alpha(1-\alpha)) = (1-\alpha)^2$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2, \text{ ha } p > \frac{1}{2}$$

[Hát persze: X^{stac} úgy generálható, hogy hamis érmével — amin a fej val.sége α — dobálunk az első fejig.

$X^{stac} \geq 3$ pont azt jelenti, hogy az első két dobás írás.]

c.) A Little formula szerint az átlagos várakozási idő

$$\bar{D} = \frac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y} = \frac{\mathbb{E}\,Geom(\alpha)}{1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{p}{1-p}, \text{ ha } p > \frac{1}{2}$$

Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor X_n nem stabil, a kisautók elszaporodnak

$\Rightarrow$ b.) 1 c.) ∞

4.5 **(6 pont)** Egy oktatónak az az elve, hogy minden érkező emailre leghamarabb másnap válaszol, aznap érkezett levélre soha. Az általa tartott kurzus 10 hallgatójának mindegyike minden nap, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel küld egy emailt az oktatónak. (Egy nap egynél több emailt senki sem küld.) Az oktató minden nap pontosan egy hallgatói levélre válaszol (már ha van a postaládájában olyan, ami nem aznapi). Átlagosan hány éjszakát tölt az oktató postaládájában egy hallgatói levél hosszú távon?

Megoldás:

Oktatónk postaládája egy egyszerű csomagkoncentrátor $M = 10$ küldővel, akik mindegyike $B(p = \frac{1}{20})$ eloszlású igényt küld időegységenként.

A rendszer stabil, mert $Mp < 1$.

Így az átlagos várakozási idő

$$\bar{D} = \bar{D}_{max} = \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-Mp)} = \frac{1}{2} + \frac{19/20}{2(1-\frac{1}{2})} = 1.45$$

4.6 **(6 pont)** Móricka vizsgát felügyel, és közben segít a hallgatóknak. A 10 hallgató között jár körbe-körbe, minden hallgatónál pontosan 1 percet tölt, és ezalatt megválaszol pontosan 1 kérdést, amit a hallgató feltesz (már ha a hallgatónak van kérdése). Minden hallgatónak minden percben, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel jut eszébe egy kérdés (a maradék $\frac{19}{20}$ valószínűséggel egy se). Átlagosan hány perc múlva kap választ Pistike a kérdéseire hosszú távon? *(Az pontosság/egyszerűség kedvéért fel kell tennünk, hogy Pistike minden eszébe jutó kérdéshez az időt Móricka előző látogatásától számítja, így minden kérdés „kiszolgálási ideje" percben mérve* 10*-nek többszöröse.)*

Megoldás:

Móricka az $M=10$ felhasználó $B(p=\frac{1}{20})$ eloszlással érkező igényeit időosztással szolgálja ki.
Így az átlagos várakozási idő

$$\underline{\underline{\bar{D}}} = \bar{D}_{time} = \frac{M}{2} + \frac{M(1-p)}{2(1-Mp)} = \frac{10}{2} + \frac{10 \cdot \frac{19}{20}}{2(1-\frac{1}{2})} = \underline{\underline{14.5}}$$

(A rendszer stabil, mert $Mp<1$.)

4.7 **(6 pont)** Róbert közrendőrnek 10 parancsnoka van, sorrendben 1., 2., ..., 10. számú parancsnok. Minden parancsnok, minden percben, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{20}$ valószínűséggel ad Róbertnek parancsot (mindenki csak 1-et). Ő azonban minden percben csak 1 parancsot tud végrehajtani. Ha több végre nem hajtott parancs is van nála, akkor azt hajtja végre, amelyik a legmagasabb rangú (vagyis legkisebb sorszámú) parancsnoktól jött, a többit halogatja. (Az időt egész percekben mérjük. Tegyük fel, hogy egy parancsot leghamarabb az érkezését követő percben lehet végrehajtani.)

a.) Hosszú távon átlagosan hány végre nem hajtott parancs van Róbert zsebében az 5. számú parancsnokától?

b.) Hosszú távon átlagosan hány perc után hajtja végre Róbert a 5. számú parancsnoktól érkezett parancsokat?

Megoldás:

Róbertnek az $M=10$ parancsnak mindegyike alkalmanként $B(p)$ eloszlású véletlen számú igényt küld (az előzményektől függetlenül, ahol $p=\frac{1}{20}$.

Az $M=10$ parancsok igényei = parancsai $M=10$ külön sorban állnak Róbert zsebében, amiket ő egy $\boxed{\text{egyirányú buszt}}$ szabálya szerint szolgál ki.

Minket az $i=5$ ~~szerszá~~ prioritású sor érdekel, legyen ennek sorhossza $X_{i,n}$ (ahol n az idő), stacionárius eloszlása $\sim X_i^{stac}$.

a.) Az egyirányú buszra kiszámolt képlet szerint

$$EX_i^{stac} = \frac{p}{2} + \frac{p(1-p)}{2} \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)} \overset{i=5}{=\!=}$$

$$= \frac{1/20}{2} + \frac{\frac{1}{20}\frac{19}{20}}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{5}{20}\right)\left(1-\frac{4}{20}\right)} = \ldots = \frac{31}{480}.$$

Az ergodtétel miatt ugyanennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz.

b.) Az egyirányú buszra kiszámolt képlet szerint az átlagos várakozási idő

$$\underline{\underline{\bar{D}_i}} = \frac{\mathbb{E}X_i^{stac}}{\mathbb{E}Y_{i,1}} = \frac{\mathbb{E}X_i^{stac}}{p} = \frac{\frac{31}{480}}{\frac{1}{20}} = \underline{\underline{\frac{31}{24}}}$$

4.8 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1-p$ val.séggel egy sem. A kiszolgálás érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idő mindig pontosan 2.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

Megoldás:

a.)

Legyen W_n az n-edik igény várakozási ideje.

Erre $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$, ahol $\Rightarrow$ $\boxed{W_{n+1} = (W_n + 2 - T_{n+1})_+}$

- $S_n \equiv 2$ minden n-re (a kiszolgálási idő)
- $T_1, T_2, T_3, \ldots$ független $\sim Geom(p)$: ennyi időt kell várni az egyes igények érkezésére.

b.) $T_{n+1} \sim Geom(p)$, így mindig ≥ 1,

így $S_n - T_{n+1} = 2 - T_{n+1} \leq 1$: W_n egy lépésben legfeljebb 1-gyel nőhet:

$$P_{ij} := \mathbb{P}(W_{n+1} = j \mid W_n = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \geq i+2 \\ \mathbb{P}(T_{n+1} = i+2-j), & \text{ha } 1 \leq j \leq i+1 \\ \mathbb{P}(T_{n+1} \geq i+2-j), & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

Mivel $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = q^{k-1} p$ ahol $q = 1-p$, ezért

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = i+2-j) = p\, q^{i+1-j}, \quad \mathbb{P}(T_{n+1} \geq i+2-j) = q^{i+1-j}$$

egy p fej-valség-ű érmével dobálva az első $(i+1-j)$ dobás írás

$$\Rightarrow P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \geq i+2 \\ p q^{i+1-j}, & \text{ha } 1 \leq j \leq i+1 \\ \cancel{q^{i+1-j}}\ q^{i+1}, & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

[Az állapottér $\{0, 1, 2, \ldots\}$]

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots \\ q^2 & pq & p & 0 & \ldots \\ q^3 & pq^2 & pq & p & 0 \ \ldots \\ q^4 & pq^3 & pq^2 & pq & p \ \ldots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

c.) A rendszer stabil $\Longleftrightarrow \mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n \Longleftrightarrow 2 < \frac{1}{p}$

vagyis $\boxed{p < \frac{1}{2}}$

4.9 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1 - p$ val.séggel nem.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

Megoldás:

a.) Legyen W_n az n-edik igény várakozási ideje.

Erre $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$, ahol

- $S_n \sim Geom(p)$: ahanyadikra egy igényt kiszolgálunk, onnantól számítva, hogy megérkezett és már nincs előtte másik
- $T_n \equiv 2$ az érkezési idő az előző érkezéstől számítva

vagyis $\boxed{W_{n+1} = (W_n + S_n - 2)_+}$

b.) $S_n \sim Geom(p) \Rightarrow S_n \geq 1$, ~~a sorhossz~~ $\Rightarrow S_n - 2 \geq -1$:

a várakozási idő 1 lépésben legfeljebb 1-gyel csökkenhet.

$$P_{ij} := \mathbb{P}(W_{n+1} = j \mid W_n = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \leq i-2 \\ \mathbb{P}(S_n - 2 = j - i) = \mathbb{P}(S_n = j-i+2), & \text{ha } j \geq i-1 \text{ és } j \neq 0 \\ \surd & \text{ha } j = 0 \\ \cancel{\mathbb{P}(S_n - 2 \leq j-i) = \mathbb{P}(S_n \leq 2-i)}, & \text{ha} \end{cases}$$

$W_{n+1} = 0$ csak úgy lehet, ha $W_n = 0$ vagy $W_n = 1$, ezeket külön kiszámolom:

$$P_{00} = \mathbb{P}(W_{n+1} = 0 \mid W_n = 0) = \mathbb{P}((S_n - 2)_+ = 0) = \mathbb{P}(S_n - 2 \leq 0) =$$

$$= \mathbb{P}(S_n \leq 2) = \mathbb{P}(S_n = 1) + \mathbb{P}(S_n = 2) = p + pq \quad (q := 1-p)$$

$$P_{10} = \mathbb{P}(W_{n+1}=0 \mid W_n=1) = \mathbb{P}((1+S_n-2)_+=0) = \mathbb{P}(S_n-1 \le 0) =$$

$$= \mathbb{P}(S_n \le 1) = \mathbb{P}(S_n = 1) = p$$

Ezek alapján a mátrix

$$P = \begin{pmatrix} p+pq & pq^2 & pq^3 & pq^4 & \cdots \\ p & pq & pq^2 & pq^3 & \cdots \\ 0 & p & pq & pq^2 & \cdots \\ 0 & 0 & p & pq & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

[az állapottér $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$]

c) A rendszer stabil $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}S < \mathbb{E}T \Leftrightarrow \frac{1}{p} < 2$

vagyis $\boxed{p > \frac{1}{2}}$

4.10 **(5 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1-p$ val.séggel nem. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát!

Megoldás:

Nevezzünk ciklusnak két szomszédos időegységet úgy, hogy az új igény mindig a ciklus végén érkezik, és közvetlenül ez után jegyezzük fel a sorhosszt.

$[0,2]$ az 1. ciklus

$[2,4]$ a 2. ciklus

⋮

stb

Így $\overline{X}_{n+1} = (\overline{X}_n - \overline{V}_{n+1})_+ + \overline{Y}_{n+1}$, ahol

$\overline{V}_{n+1} \sim Bin(2,p)$ az $(n+1)$-edik ciklusban kiszolgált igények száma

$\overline{Y}_{n+1} \equiv 1$ az újonnan érkező igények száma (ez ciklusonként mindig 1)

Vagyis $\overline{X}_{n+1} = (\overline{X}_n - \overline{V}_{n+1})_+ + 1$

Láthatólag $\overline{X}_{n+1} \geq 1$, így az állapottér $\{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4 \dots\}$

Mivel $V_{n+1} \in \{0,1,2\}$, a sorhossz legfeljebb 1-gyel változhat (ez egy születési-halálozási folyamat)

A sorhossz • 1-gyel nő $\Longleftrightarrow \bar{V}_{n+1}=0$, ennek val.sége

$$(1-p)^2 = q^2 \quad , \text{ahol } q := 1-p$$

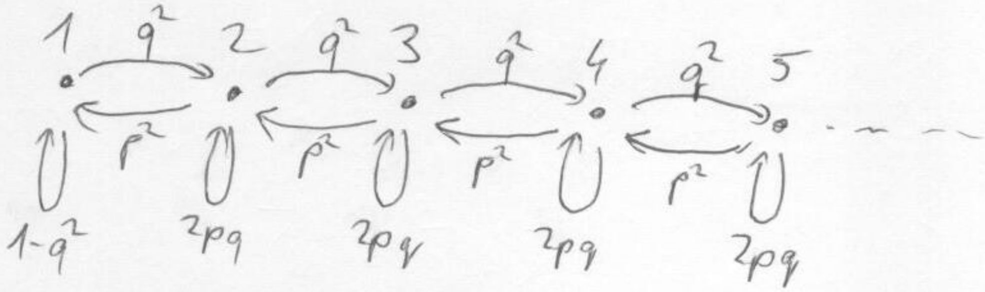
• változatlan $\Longleftrightarrow \bar{V}_{n+1}=1$, ennek val.sége $2pq$

• 1-gyel csökken $\Longleftrightarrow \bar{V}_{n+1}=2$, $\sim$ p^2

hacsak nem eleve 1 volt a sorhossz, mert akkor változatlan $\Longleftrightarrow \bar{V}_{n+1} \geq 1$,

ennek val.sége $\cancel{p}\, 2pq + p^2 = 1 - q^2$.

Vagyis a gráf-reprezentáció



Az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p^2 & 2pq & q^2 & 0 & 0 & \\ 0 & p^2 & 2pq & q^2 & 0 & \\ 0 & 0 & p^2 & 2pq & q^2 & \\ 0 & 0 & 0 & p^2 & 2pq & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

4.11 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1-p$ val.séggel egy sem. A kiszolgálási idő mindig pontosan 2. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát! Küzben gondoljuk át, hogy $\bar{X}_n$ tényleg Markov-e.

Megoldás:

Álljon egy <u>ciklus</u> két szomszédos időegységből!

$[0,2]$ az 1. ciklus

$[2,4]$ a 2. ciklus

$[4,6]$ a 3. ciklus, stb.

Legyen $\overline{X}_n$ a sor hossza az n-edik ciklus végén, vagyis $2n$-kor

$\overline{Y}_n$ az n-edik ciklus alatt érkező új igények száma. Ez $\sim B(2,p)$ és független az előzményektől. Ezen igények kiszolgálása akár azonnal is elkezdődhet, de leghamarabb a következő ciklusban érhet véget.

<u>Észrevétel</u>: • Ha $\overline{X}_n \geq 1$, akkor az $(n+1)$-edik ciklusban, vagyis $[2n, 2n+2]$-ben $\boxed{\text{biztosan pontosan } 1}$ igényt szolgálunk ki (bár nem lehet tudni, hogy mikor): egy igény kiszolgálása már folyik és be is fog fejeződni, másikra nem lesz idő.

• Ha viszont $\overline{X}_n = 0$, akkor az $(n+1)$-edik ciklusban biztosan nem lesz kiszolgálás: Ha jön is egy igény az elején, azzal már nem végzünk.

Így érvényes a szekáses sorhossz-evolúciós egyenlet:

$$\bar X_{n+1} = (\bar X_n - \bar V_{n+1})_+ + \bar Y_{n+1},$$

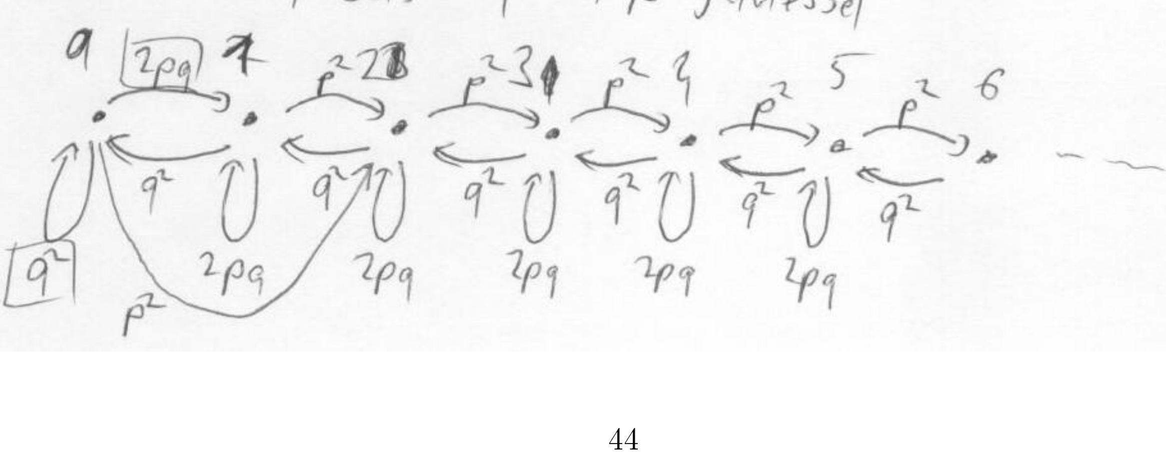
ahol $\bar V_{n+1} \equiv 1$ és $\bar Y_{n+1} \sim Bin(2,p)$.

Mivel Y_n független az előzményektől, $\boxed{\bar X_n \text{ Markov}}$.

- Ha $\bar X_n \geq 1$, akkor $\bar X_{n+1} = \bar X_n + (\bar Y_{n+1} - 1)$ és a változás $(\bar Y_{n+1} - 1) \in \{-1, 0, 1\}$, vagyis a sor hossza legfeljebb 1-gyel változhat: $\bar X_n$ majdnem születési-halálozási folyamat

- Ha viszont $\bar X_n = 0$, akkor $(\bar X_n - 1)_+ = (0-1)_+ = \cancel{0=1}$

$$= 0 = (1-1)_+,$$ vagyis a 0-ból az átmenet-val.ségek ugyanazok, mint az 1-ből: $q := 1-p$ jelöléssel



Ebből az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 & \cdots \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 & \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & 0 & \\ 0 & 0 & q^2 & 2pq & p^2 & \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 2pq & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

[Vigyázat: az állapottér $\{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

4.12 **(7 pont)** Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

a.) Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n-edik nap végén. Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját és számoljuk ki a stacionárius eloszlást!

b.) Legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k-adik tejföl érkezése után! Mi az $\tilde{X}_k$ Markov lánc stacionárius eloszlása? *(Tipp: erre volt előadáson egy tétel.)*

c.) Tegyük fel, hogy Juliska néni a tejfölöket érkezési sorrendben használja el. Legyen D_k a k-adik tejföl által a hűtőben töltött éjszakák száma. Mi a D_k Markov lánc stacionárius eloszlása? *(Tipp: erre is volt előadáson egy tétel.)*

Megoldás:

Juliska néniék hűtője egy diszkrét idejű kiszolgálási sor ahol az érkezés és a kiszolgálás is <u>bináris</u>:

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}, \text{ ahol}$$

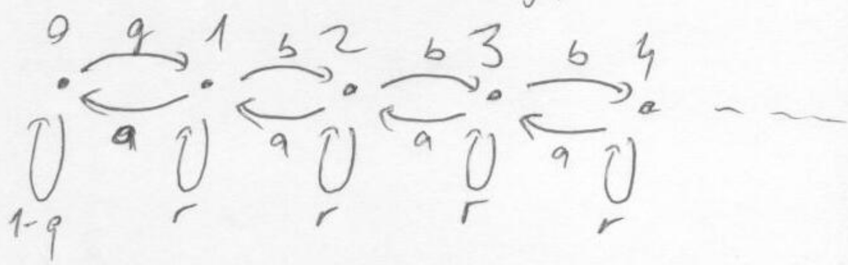
$V_n \sim B(p)$ az n-edik napon tervezett ragulevesek száma (ami akkor valósul meg, ha van tejföl)

$Y_n \sim B(q)$ az n-edik napon érkező tejfölök száma

és mind független az előzményektől.

Így érvényesek a 11. előadás-jegyzet képletei és tételei:

a.) X_n gráf-reprezentációja



ahol $a = p(1-q)$, $b = (1-p)q$, $r = 1-a-b$.

X_n születési-halálozási folyamat, ebből a π stac. eloszlás:

$$\frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} = \begin{cases} q/a, & \text{ha } k=0 \\ \frac{b}{a}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi_k = \begin{cases} \pi_0, & \text{ha } k=0 \\ \pi_0 \frac{q}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}}$$

ahol a normálásból $\boxed{\pi_0 = 1 - \frac{q}{p}}$ (lásd az előadást a számolásból.)

[Megj: Π_0 a hosszadalmas számolás helyett ennan is tudható, hogy a 7. előadás-jegyzet 6. oldal tétele szerint az üresjárat val. sége

$$\Pi_0 = \mathbb{P}(X^{stac} = 0) = 1 - \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V} = 1 - \frac{q}{p}$$
]

b.) A 11. előadásjegyzet 9. oldal tétele szerint

$$\tilde{X}^{stac} \sim Geom(\alpha) \quad \text{ahol} \quad \alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}.$$

c.) A 11. előadásjegyzet 14. oldal legalja:

$$D^{stac} \sim Geom(p\alpha) = Geom\left(\frac{p-q}{1-q}\right)$$

4.13 **(10 pont)** Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n-edik nap végén. Ennek időfejlődése könnyű, és most nem ezzel foglalkozunk.

Hanem: legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k-adik tejföl érkezése után! (Ez persze legalább 1.)

a.) Írjuk fel az $\tilde{X}_k$ Markov lánc átmenetmátrixát! (Nyugodtan feltehetjük, hogy már az általunk „első”-nek számozott tejföl érkezése előtt is voltak tejfölök a hűtőben.)
(Tipp: $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig tervbe vett ragulevesek száma, ami persze pont az elhasznált tejfölök száma, ha van ennyi tejföl. Pont ennek a V-nek az eloszlását számoltuk ki egy másik feladatban.)

(Megoldás:

$$P_{ij} := \mathbb{P}(\tilde{X}_1 = j | \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0 & \textit{, ha } j > i+1 \\ A & \textit{, ha } j = i+1 \\ (1-A)L(1-L)^{i-j} & \textit{, ha } 2 \leq j \leq i \\ (1-A)(1-L)^{i-1} & \textit{, ha } j = 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ *és* $L = \frac{q}{p+q-qp}$. *)*

b.) Ellenőrizzük le kézzel, hogy $\tilde{X}_k$ stacionárius eloszlása az $\alpha := 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ paraméterű geometriai eloszlás! Vagyis azt kell ellenőrizni, hogy

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij},$$

ahol $\pi_i = \alpha(1-\alpha)^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.
(Tipp: csodák csodája, $(1-\alpha)(1-L) = A$*.)*

Megoldás:

A tipp szerint $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig terrbe vett raguleresek száma. A 3.10-es feladat pont ennek a V-nek az eloszlásáról szólt, és tudjuk belőle, hogy

$$\mathbb{P}(V=k) = \begin{cases} A, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)L(1-L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases} \qquad \mathbb{P}(V \geq k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)(1-L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$

Innen

b.) $$P_{ij} := \mathbb{P}(\tilde{X}_1 = j \mid \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j > i+1 \\ \mathbb{P}(V=0) = A, & \text{ha } j = i+1 \\ \mathbb{P}(V = \underbrace{i-(j-1)}_{\geq 1}) = (1-A)L(1-L)^{i-j}, & \text{ha } 2 \leq j \leq i \\ \mathbb{P}(V \geq i) = (1-A)(1-L)^{i-1}, & \text{ha } j=1 \end{cases}$$

[Fontos: $\tilde{X}_1 = (\dots)_+ + 1 \geq 1$, tehát az állapotok $\{\cancel{0}, 1, 2, 3 \dots\}$.
Hát persze: mindig egy tejföl érkezése után néztük a hűtőt — ilyenkor sose üres.]

b.) A feladat jelöléseivel legyen $\Pi_j' = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i P_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \ldots$

Ekkor • $\Pi_1' = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i P_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{i-1} (1-A)(1-L)^{i-1} =$

$$= \alpha (1-A) \left[1 + [(1-\alpha)(1-L)] + [(1-\alpha)(1-L)]^2 + [(1-\alpha)(1-L)]^3 + \ldots \right]$$

$$= \alpha (1-A) \frac{1}{1-(1-\alpha)(1-L)} \xrightarrow[(1-\alpha)(1-L) = A]{\text{csodák csodája:}} \alpha (1-A) \frac{1}{1-A}$$

$$= \alpha = \Pi_1 \checkmark$$

• $j \geq 2$-re

$$\Pi_j' = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i P_{ij} = \sum_{i=1}^{j-2} \Pi_i \cdot 0 + \Pi_{j-1} P_{j-1,j} + \sum_{i=j}^{\infty} \Pi_i P_{ij} =$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-2} A + \sum_{i=j}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{i-1} (1-A) L (1-L)^{i-j} =$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-2} A + L \alpha (1-\alpha)^{j-1} (1-A) \left[1 + [(1-\alpha)(1-L)] + [(1-\alpha)(1-L)]^2 + \ldots \right] =$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-2} A + L \alpha (1-\alpha)^{j-1} \cancel{(1-A)} \frac{1}{\cancel{1 - \underbrace{(1-\alpha)(1-L)}_{A \text{, még mindig}}}}$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-1} \left[\frac{A}{1-\alpha} + L \right] \xrightarrow[\text{még mindig}]{\frac{A}{1-\alpha} = 1-L} \alpha (1-\alpha)^{j-1} [1 - L + L]$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-1} = \Pi_j \checkmark$$ Hurrá, hurrá, hurrá.

4.14 **(5 pont)** Egy zajos csatornán másodpercenként 10^8 bitet tudunk átküldeni. Minden átküldött bit a többitől függetlenül 10^{-6} valószínűséggel sérül. A csatornán csomagokat küldünk át, amik

N adatbitből és 64 kísérő bitből állnak. A vevő az esetleges hibákat teljes biztonsággal észleli és „negatív nyugtát” küld róluk, ami teljes biztonsággal megérkezik a küldőhöz. Ilyenkor a teljes csomagot újra kell küldeni. Másodpercenként legfeljebb hány bitnyi adatot lehet a csatornán átvinni hosszú távon, ha N-et jól választjuk meg, és

a.) a csomag elküldése után a nyugta azonnal megérkezik?

b.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg, és meg kell várni, mielőtt a következő csomagot küldeni kezdjük?

c.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg. Mi addig is küldjük a következő csomagokat, de ha negatív nyugta jön, akkor visszaugrunk a hibás csomagra és onnan folytatjuk, a csomagok sorrendjét továbbra is megtartva? *(Tipp: ebben az esetben az optimalizálás csak numerikusan megy. Nem kell túlzásba vinni: ábrázoljuk a kapacitást N függvényében, és olvassuk le a maximumot.)*

Megoldás:

Ez a „Csomagküldés zajos csatornán" probléma.

A jegyzet jelöléseivel

- $t_0 = 10^{-8}$ az egy bit átviteléhez szükséges idő (ami a jegyzetben $1\mu s$ volt)
- $p_b = 10^{-6}$ a bithiba-valószínűség
- $M = 64$ a kísérő bitek száma.

a.) Késleltetésmentes nyugta esete: a jegyzet szerint $\alpha := -\ln(1-p_b) = -\ln(1-10^{-6}) \approx 10^{-6}$ jelöléssel az optimális N érték

- a közelítő képlet szerint $N_{opt} \approx \sqrt{\frac{M}{p_b}} = 8000$, és akkor

$$r_{opt} \approx 1 - 2\sqrt{Mp_b} \approx \boxed{0.984}$$

- a pontos érték $N_{opt} = -\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} + \frac{M}{\alpha}} \approx 7964.06$

amiből $r = \frac{N(1-p_b)^{M+N}}{M+N}$ miatt

$N = 7968$-ra $\boxed{r = 0.9840957825}$

$N = 7969$-re $\boxed{r = 0.9840957824}$

láthatólag mindegy

vagyis tényleges idővel számolva a kapacitás

$$\boxed{\approx 98{,}400{,}000 \frac{bit}{sec}} = 9{,}84 \cdot 10^7 \frac{bit}{sec}$$

b.) Stop-and-wait protokoll esete $\tau = 1$ sec várakozási idővel, vagyis $\tau = K t_0$ ahol $K = 10^8$.

Az előadás jegyzet szerint az optimális adatcsomagméret

$$N_{opt} = -\frac{M+K}{2} + \sqrt{\frac{(M+K)^2}{4} + \frac{M+K}{\alpha}} \approx 990195,$$

amiből az optimális kapacitás

$$r_{opt} = \frac{N_{opt}(1-p_b)^{M+N}}{M+N_{opt}+K} \approx 0.00364231,$$

vagyis valós időben $\approx \boxed{364000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}}$

c) Go-back-N protokoll esete, továbbra is $K = 10^8$.

A jegyzet szerint a kapacitás N függvényében

$$r = r(N) = \frac{N(1-p_b)^{M+N}}{M+N+K\left(1-(1-p_b)^{M+N}\right)}.$$

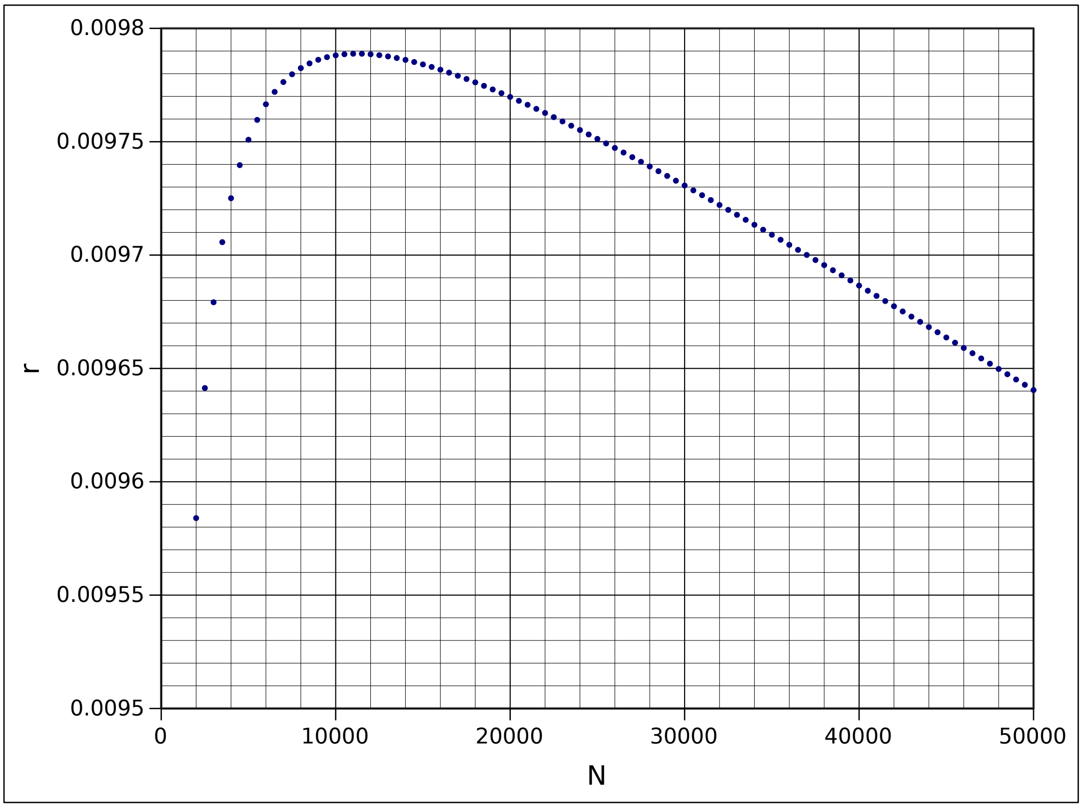
Ezt N függvényében ábrázolva és a maximum környékét kinagyítva (lásd ábra), látszik, hogy

$N_{opt} \approx 11000$ mellett $r_{opt} \approx 0.00979$,

vagyis az elérhető kapacitás $\approx \boxed{979000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}}$.

5. Poisson-folyamat

5.1 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.



1. ábra. Kapacitás az adacsomag méretének függvényében, Stop-and-wait eset

(a) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

(b) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

(c) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

Megoldás: Az egyes oldalakra eső sajtóhubák száma Poisson eloszlással közelíthető, mivel sok sajtóhuba próbálkozik egymástól lényegében függetlenül, hogy pont oda essen, és ez mindegyiknek kicsi valószínűséggel sikerül. Sőt, az egyes oldalakon lévő sajtóhubák száma jó közelítéssel független, ugyanilyen megfontolásból. Ezek után csak a várható értékükre van szükség, ami persze az adott oldalszámra eső hubák átlagos száma.

(a) Jelölje X_{13} a 13-adik oldalra eső sajtóhubák számát. A fentiek alapján ez jó közelítéssel Poisson eloszlású $\lambda = \frac{1500}{1000} = 1.5$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1.5}\frac{(1.5)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Emiatt

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \approx 1 - e^{-1.5} - e^{-1.5} \cdot 1.5 \approx 0.44.$$

(b) Legyen X_{42} a 42-edik oldalra eső sajtóhubák száma. A fentiek miatt X_{42} is $Poi(1.5)$ eloszlással közelíthető és X_{13}-tól jó közelítéssel független, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2 \text{ és } X_{42} = 2) \approx \mathbb{P}(X_{13} \geq 2)\mathbb{P}(X_{42} = 2) \approx 0.44 \cdot e^{-1.5} \frac{(1.5)^2}{2!} \approx 0.11.$$

(c) Sőtsőt, a vesszőhibák és az egyéb sajtóhubák száma jó közelítéssel külön-külön is Poisson eloszlású és egymástól független, ugyanilyen megfontolásból. Ezért ha Y_{13} a 13-adik oldalon lévő vesszőhibák száma, Z_{13} pedig a 13-adik oldalon lévő egyéb sajtóhubák száma, akkor jó közelítéssel $Y_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{1}{3}}{1000})$, $Z_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{2}{3}}{1000})$ és ezek függetlenek. Így

$$\mathbb{P}(Y_{13} \geq 2 \text{ és } Z_{13} = 1) \approx \left(1 - e^{-0.5}(1 + 0.5)\right)\left(e^{-1} \cdot 1\right) \approx 0.033.$$

5.2 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

Megoldás:

a.) Legyen X a Móricka szeletébe kerülő mazsolák száma. X jó közelítéssel Poisson eloszlású, mert sok mazsola próbálkozik, hogy bekerüljön, mindegyik a többitől függetlenül kis valószínűséggel jár sikerrel, X pedig a sikeres próbálkozók száma. A λ paraméter pedig a várható érték: $\lambda = 6$. Így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}(1 + \lambda) = \\ &= 7e^{-6} \approx 0.017 = 1.7\%.\end{aligned}$$

b.) Legyen Y a mazsolák száma Pistike szeletében. Mivel a kondér nagy és a mazsola sok, X és Y jó közelítéssel független, így

$$\mathbb{P}(X < 2 \,|\, Y = 12) = \mathbb{P}(X < 2) \approx 1.7\%$$

továbbra is.

5.3 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

Megoldás: Az időt mérjük órában. Így a csörgések Poisson folyamatának rátája $\frac{1}{2}$. Legyen X_t a film kezdetétől számítva t idő alatt a csörgések száma, T pedig az első csörgésig eltelt idő. Tudjuk, hogy $X_t \sim Poi(t \cdot \lambda)$, de azt is, hogy $T \sim Exp(\lambda)$.

a.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{2.5} = 0) = \mathbb{P}(Poi(2.5 \cdot \frac{1}{2}) = 0) = e^{-1.25}\frac{1.25^0}{0!} = e^{-1.25} \approx 0.287$. **2. megoldás:** $\mathbb{P}(T > 2.5) = 1 - \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2}) < 2.5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2.5}) = e^{-1.25} \approx 0.287$.

b.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{0.5} > 0) = 1 - \mathbb{P}(Poi(0.5 \cdot \frac{1}{2}) = 0) = 1 - e^{-0.25}\frac{0.25^0}{0!} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.221$.
2. megoldás: $\mathbb{P}(T < 0.5) = \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2}) < 0.5) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 0.5} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.221$.

c.) **1. megoldás:** Poisson folyamat ritkítása is Poisson folyamat: ha csak a Jancsi által felvett hívásokat nézzük, azok is Poisson folyamatot alkotnak, csak a ráta ezúttal $\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mivel óránként átlag $\frac{1}{4}$ hívást vesz fel. Így, ha $Y_{2.5}$ a Jancsi által 2.5 óra alatt felvett hívások száma, akkor $Y_{2.5} \sim Poi(2.5 \cdot \mu) = Poi(0.625)$. Így

$$\mathbb{P}(Y_{2.5} > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 0) - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

2. megoldás: Legyen $X = X_{2.5}$ a telefoncsörgések teljes száma, $X \sim Poi(\rho)$ ahol $\rho = 1.25$, és legyen Y a Jancsi által felvett telefonok száma. Az $X = n$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása binomiális, éspedig $(n, p = \frac{1}{2})$ paraméterekkel. Vagyis $q = 1 - p$ jelöléssel $n = 0, 1, 2, \ldots$-re

$$\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{ha } k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{ha } k > n, \text{ persze} \end{cases}.$$

Ebből a teljes valószínűség tétele szerint minden $k = 0, 1, 2 \ldots$-re

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

Ez az összeg szerencsére kiszámolható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-t kiírva $n!$ kiesik, utána pedig kézenfekvő az $l := n - k$ jelölés, ha már n úgy is csak k-tól fut:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\rho}\rho^{l+k}\frac{1}{k!l!}p^k q^l = e^{-\rho}\frac{(p\rho)^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q\rho)^l}{l!}.$$

Az utolsó szumma kedves ismerősünk, mivel $e^x = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!}$. Így

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\rho}\frac{(p\rho)^k}{k!}e^{q\rho} = e^{-p\rho}\frac{(p\rho)^k}{k!}.$$

Vagyis sikerült kézzel bebizonyítanunk, hogy Poisson eloszlás ritkítása is Poisson eloszlás, éspedig $Y \sim Poi(p\rho)$.
Innen pedig, mivel $p\rho = \frac{1}{2} \cdot 1.25 = 0.625$,

$$\mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

5.4 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k-kra)?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

Megoldás:

a.) X a sikeres próbálkozók száma nagyon sok független próbálkozásból, nagyon kis sikerval.ség mellett, így $X \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = \mathbb{E}X$. Esetünkben $\lambda = \mathbb{E}X = 60s \cdot 0.1Bq = 6$, vagyis $X \sim Poi(6)$, ami azt jelenti, hogy

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-6}\frac{6^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

b.) Legyen $X_{[0,1]}$ a 08:00 és 08:01 közötti bomlások száma, $X_{[1,3]}$ a 08:01 és 08:03 közötti bomlások száma. Ezek diszjunkt intervallumok, ezért $X_{[0,1]}$ és $X_{[1,3]}$ függetlenek. Továbbá $X_{[0,1]} \sim Poi(6)$ az előző részből, és hasonlóan $X_{[1,3]} \sim Poi(12)$. Ezért

$$\mathbb{P}(X_{[0,1]} = 4 \text{ és } X_{[1,3]} = 10) = \mathbb{P}(X_{[0,1]} = 4)\mathbb{P}(X_{[1,3]} = 10) =$$
$$= e^{-6}\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-12}\frac{12^{10}}{10!} \approx 0.134 \cdot 0.105 \approx 0.01403$$

c.) Legyen Y a 09:00:00 és 09:00:10 közötti bomlások száma. Az előzőekhez hasonlóan $Y \sim Poi(1)$. Vegyük észre, hogy pontosan akkor kell legalább 10 másdopercet várni, ha 10 másodperc alatt nem történik bomlás, vagyis a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1} \approx 0.368.$$

Alternatív megoldás: Legyen τ a 09:00 után történő első bomlásig a várakozási idő másodpercben. A Poisson-folyamat tulajdonságai miatt $\tau \sim Exp(\lambda)$ ahol $\lambda = \frac{1}{10}$ a folyamat intenzitása. Így

$$\mathbb{P}(\tau \geq 10) = 1 - F_{Exp(\frac{1}{10})}(10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10}\right) = e^{-1} \approx 0.368$$

5.5 Egy radioaktív mintában másodpercenkent átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfarészecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy két másodperc hosszú időintervallumban legalább 4 részecskét észlel?

Megoldás: A nagyenergiájú alfa-részecskék Poisson-folyamat szerint keletkeznek, 1 rátával. (Az időt mérjük másodpercben.) Az *észlelt* nagyenergiájú részecskék folyamata ennek egy ritkítása, ezért szintén Poisson-folyamat, $1 \cdot 0.9 = 0.9$ rátával. Ugyanígy, a kisenergiájú alfa-részecskék is

Poisson-folyamat szerint keletkeznek 3 rátával, tehát az *észlelt* kisenergiájú részecskék folyamata is Poisson-folyamat, $3 \cdot 0.2 = 0.6$ rátával. A kétféle észlelt részecske folyamata független, ezért az uniójuk is Poisson-folyamat – és a ráták összeadódnak.

Összefoglalva a lényeg: az *összes észlelt* részecske folyamata Poisson-folyamat, $0.9 + 0.6 = 1.5$ rátával.

Legyen X a két másodperc alatt észlelt részecskék száma. Így $X \sim Poi(\lambda)$, ahol $\lambda = \mathbb{E}X = 2 \cdot 1.5 = 3$. Vagyis $k = 0, 1, 2, \dots$-re $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$. A kérdésre a válasz:

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X = k) = 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right) = 1 - 13e^{-3} \approx 0.3528 \approx 35\%.$$

5.6 A radioaktív ^{14}C atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

b.) Veszünk egyetlenegy ^{14}C magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? *(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)*

c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X-szel jelöljük a 3 másodperc alatt *bekövetkező* bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt *észlelt* bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi T eloszlása?

Megoldás:

a.) Jelöljük ξ-vel az (egyetlen) atommag élettartamát, F-fel ennek eloszlásfüggvényét, $T_{1/2}$-vel a felezési időt, vagyis $T_{1/2} = 5730\text{év} \approx 1.8 \cdot 10^{11}s$. Az exponenciális eloszlás definíciója szerint $x \geq 0$-ra

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

a felezési idő definíciója szerint pedig

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi < T_{1/2}) = F(T_{1/2}) = 1 - e^{-\lambda T_{1/2}},$$

amiből

$$\lambda = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} \approx \frac{0.693}{5730\text{év}} \approx \frac{0.693}{1.8 \cdot 10^{11}s}$$

i.) $\lambda = \frac{0.693}{5730\text{év}} \approx 1.21 \cdot 10^{-4}\frac{1}{\text{év}}$, vagyis ha az időt években mérjük, akkor $\lambda \approx 1.21 \cdot 10^{-4}$.

ii.) $\lambda \approx \frac{0.693}{1.8 \cdot 10^{11} s} \approx 3.83 \cdot 10^{-12} \frac{1}{s}$, vagyis ha az időt másodpercben mérjük, akkor $\lambda \approx 3.83 \cdot 10^{-12}$.

b.) Mérjük az időt másodpercben!

i.) 1 másodpercen belül: Az eltelt idő $t = 1$.

$$\mathbb{P}(\xi < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx 3.83 \cdot 10^{-12}$$

Hát persze: Mivel λt nagyon kicsi, $e^{-\lambda t}$-t nagyon jól közelíti az elsőfokú Taylor polinomja: $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$, vagyis $F(t) \approx \lambda t$. Éppen ezért hívják λ-t az exponenciális eloszlás *rátájának*.
(Alternatív érvelés: mivel λt kicsi, a ξ élettartam $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (ha $x > 0$) sűrűségfüggvénye jó közelítéssel konstans a $[0, t]$ intervallumon, így $\mathbb{P}(\xi < t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(0)(t - 0) = \lambda t$.)

ii.) Hasonlóan 2 és 3 másodpercre:

$$\mathbb{P}(\xi < 2) \approx 2\lambda \approx 7.66 \cdot 10^{-12}$$
$$\mathbb{P}(\xi < 3) \approx 3\lambda \approx 1.15 \cdot 10^{-11}$$

c.) Szigorúan véve X binomiális eloszlású $n = 10^{12}$ és $p = \mathbb{P}(\xi < 3) \approx 3\lambda \approx 1.15 \cdot 10^{-11}$ paraméterekkel, így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 12) &= \binom{n}{12} p^{12} (1-p)^{n-12} \\ &\approx \binom{1000000000000}{12} \left(1.15 \cdot 10^{-11}\right)^{12} \left(1 - 1.15 \cdot 10^{-11}\right)^{999999999988}.\end{aligned}$$

Ezt az én számológépem nem is bírja kiszámolni, ezért Poisson eloszlással közelítünk: mivel n nagy és p kicsi, jó közelítéssel X Poisson eloszlású $np \approx 11.5$ paraméterrel. Vagyis

$$\mathbb{P}(X = 12) \approx e^{-11.5} \frac{11.5^{12}}{12!} \approx 0.113 = 11.3\%$$

d.) Y a fenti, Poisson eloszlással modellezhető X ritkítása, így maga is (jó közelítéssel) Poisson eloszlású $\frac{np}{4} \approx 2.875$ paraméterrel. Így

$$\mathbb{P}(Y = 3) \approx e^{-2.875} \frac{2.875^3}{3!} \approx 0.223 = 22.3\%$$

e.) Mivel az anyag másodperces időskálán nézve nagyon lassan fogy el, rövid ideig nyugodtan úgy tekinthetjük, hogy az észlelések Poisson folyamat szerint történnek. (Hosszú időre ez persze nem igaz, 5730 év alatt például a felére csökken az aktivitás (vagyis a ráta).) Mivel a bomlások rátája $n\lambda$, az észlelések rátája $\frac{n\lambda}{4} \approx 0.96$. Így az első észlelésig eltelt T idő (nagyon jó közelítéssel) exponenciális eloszlású 0.96 paraméterrel.

5.7 Egy internetes kiszolgálóhoz percenként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?

b.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?

c.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

Megoldás:

a.) Legyen X a 10:00 és 10:02 között érkező hibás kérések száma. A hibás kérések folyamata az összes kérés Poisson-folyamatának ritkítása, így maga is Poisson folyamat. Mivel két perc alatt átlag két hibás kérés érkezik, $\mathbb{E}X = 2$, vagyis $X \sim Poi(2)$. Így $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0.135$

b.) Mivel a 20 kérés mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás,

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem hibás}) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20} \approx 0.122$$

(Alternatív megoldás: azon feltétel mellett, hogy összesen 20 *kérés érkezett, a hibás kérések száma binomiális eloszlású* $n = 20$, $p = \frac{1}{10}$ *paraméterekkel, és*

$$\mathbb{P}\left(Bin\left(20; \frac{1}{10}\right) = 0\right) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20-0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}.$$

)

c.) A hibás és a hibátlan kérések száma egymástól független, ezért a feltételes valószínűség megegyezik a feltétel nélküli valószínűséggel, amit az a.) pontban kiszámoltunk: $e^{-2} \approx 0.135$

6. Laplace-transzformáció

6.1 Legyen $X \sim Exp(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel X Laplace transzformáltját! Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

6.2 Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Mi a Laplace-transzformáltja?

6.3 $X, Y \geq 0$ független valószínűségi változók, $Z = X + Y$, $X \sim Exp(1)$ és $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Mi Y eloszlása?

6.4 Móricka éjjelente hullócsillagokat néz, és óránként átlagosan 4-et lát. Minden hullócsillag, a többitől függetlenül, véletlen ideig látszik. Ez a véletlen idő exponenciális eloszlású, $\frac{1}{10}s$ várható értékkel. Jelöljük X-szel azt az időt, ameddig Móricka 22:00 és 24:00 között hullócsillagot *lát* (másodpercben mérve).

a.) Számoljuk ki X Laplace transzformáltját! (Jelölje L.)

b.) Mennyi $L'(0)$?

c.) Mennyi $L''(0)$?

d.) Mennyi X szórásnégyzete?

(A precízek kedvéért: Elvileg előfordulhat, hogy egyszerre két hullócsillag is látszik, vagy hogy egy hullócsillag felvillanása csak részben esik 22:00 és 24:00 közé (pl. mert 22:00 előtt egy ezredmásodperccel kezdődik). Ezektől nagyvonalúan tekintsünk el.)

6.5 Pistike irodájában reggel 8-tól kezdve óránként átlag 3-szor csörög a telefon, Poisson-folyamat szerint. Pistike valamikor 8:00 és 9:00 között érkezik az irodába, egyenletes eloszlású véletlen időpontban (ami független a telefonhívásoktól). Mi a valószínűsége annak, hogy Pistike egyetlen hívásról sem marad le?

7. Folytonos idejű Markov láncok

7.1 Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

(b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

(c) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja?

(d) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve?

(e) Hosszú távon mennyi lesz Pistike jókedvének időátlaga?

Megoldás:

(a) Az időt mérjük percben. Az állapottér $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ugrani csak szomszédos állapotba lehet, éspedig felfelé 1 rátával (mert a teherautók 1 rátával jönnek, lefelé pedig 3 rátával, mert a személyautók 3 rátával jönnek. Persze az 1-ből csak felfelé, az 5-ből csak lefelé lehet ugrani. Így a generátor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_1 : \pi_2 = 3 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$, $\pi_3 : \pi_4 = 3 : 1$, $\pi_4 : \pi_5 = 3 : 1$. Összesítve $\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4 : \pi_5 = 81 : 27 : 9 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{81}{121} & \frac{27}{121} & \frac{9}{121} & \frac{3}{121} & \frac{1}{121} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $A^T\pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

(c) Egy óra hosszú idő, ezért a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_{60} = 1 \,|\, X_0 = 5) \approx \pi_1 = \frac{81}{121} \approx 69\%$.

(d) Az ergodtétel értelmében az időátlag $\pi_5 = \frac{1}{121} \approx 0.8\%$.

(e) A jókedv egy szám 1 és 5 között, egész pontosan t-kor a jókedv X_t. Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i\in S} i\cdot\pi_i = 1\cdot\frac{81}{121} + 2\cdot\frac{27}{121} + 3\cdot\frac{9}{121} + 4\cdot\frac{3}{121} + 5\cdot\frac{1}{121} = \frac{179}{121} \approx 1.48.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

7.2 A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t. Az időt mérjük hónapokban.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünkésznél a rátákkal!*

b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?

d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?

e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

Megoldás: Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ha 0 csatár egészséges, persze nincs sérülés. Ha 1 egészséges (vagyis $X_t = 1$), akkor az az egy $\frac{1}{3}$ rátával sérül meg, vagyis $\lambda_{10} = \frac{1}{3}$. Ha 2 csatár egészséges, akkor mindkettő játszik is, így *valamelyikük* már $\lambda_2 1 = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ rátával sérül meg. Ha 3 vagy 4 csatár egészséges, akkor is csak kettő játszik, így a sérülés rátája ugyanennyi: $\lambda_{32} = \lambda_{43} = \frac{2}{3}$.

Ha minden csatár egészséges, akkor persze egy se tud meggyógyulni. A pontosan 1 sérült (vagyis $X_t = 3$), akkor azaz egy 1 rátával épül fel, vagyis $\lambda_3 4 = 1$. Ha 2 sérült, akkor mindkettő lábadozik, így *valamelyikük* már $\lambda_2 3 = 2\cdot 1 = 2$ rátával épül fel. Ugyanígy, ha 3 sérült, akkor mindhárom lábadozik, ezért $\lambda_1 2 = 3$, és ha mind a 4 sérült, akkor mind a négy lábadozik, így $\lambda_0 1 = 4$.

Mivel egy valószínűséggel egyszerre csak egy csatár tud megsérülni vagy felépülni (a folytonos Markov modell szerint), az összes többi (nem szomszédos állapotok közötti) ugrási ráta 0.

a.) Így az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -10/3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -8/3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(A főátlón kívülre az ugrási rátákat írjuk, a főátlóba meg annyit, hogy minden sorösszeg nulla legyen.)

b.) A $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_4)$ stacionárius eloszlás kiszámításához vagy megoldjuk a $G^T \pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszert azzal a kiegészítő feltétellel, hogy $\pi_0 + \dots + \pi_4 = 1$, vagy kihasználjuk, hogy X_t születési-halálozási folyamat, amiből *szomszédos* i, j állapotokra $\frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{\lambda_{ji}}{\lambda_{ij}}$. Mindkettőből az jön ki, hogy

$$\pi = c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 & 54 & 162 & 243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{472} & \frac{12}{472} & \frac{54}{472} & \frac{162}{472} & \frac{243}{472} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.002 & 0.025 & 0.114 & 0.343 & 0.515 \end{pmatrix}.$$

c.) A 0 állapotban eltöltött időnek a teljes időhöz mért aránya nem egyéb, mint $f(X_t)$ időátlaga, ahol $f : S \to \mathbb{R}$ a 0 állapot indikátora: oszlopvektor formájában $f = (1\,0\,0\,0\,0)^T$. Mivel a Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint ez az időátlag tart $\pi f = \pi_0 \approx 0.002$, vagyis a Faláb FC hosszú távon az idő kb. 2 ezrelékében játszik csatár nélkül.

d.) A játszó csatárok számát az állapot függvényében a $g = (0\,1\,2\,2\,2)^T$ függvény adja meg. Ennek időátlaga hosszú távon - ismét az ergodtétel miatt $\pi g = \pi_1 + 2 \cdot (\pi_2 + \pi_3 + \pi_4) \approx 1.97$.

e.) A 4 állapotból való elugrás rátája $\frac{2}{3}$, így annak valószínűsége, hogy $t = \frac{1}{3}$ ideig nem történik ugrás, pontosan annak valószínűsége, hogy egy $\lambda = \frac{2}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlás $t = \frac{1}{3}$-nál nagyobb értéket vesz fel, vagyis $1 - F_{\lambda=\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}) = e^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{9}} \approx 0.80$.

7.3 Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

Megoldás: Az állapotokat jelöljük számokkal: legyen $S = \{0, 1\}$ ahol 0 a passzív, 1 pedig az aktív állapot. Jelöljük a rendszer állapotát t idő elteltével X_t-vel. Mivel csak két állapot van, ugrani persze 0-ból csak 1-be, 1-ből pedig csak 0-ba lehet.

a.) Az 1-ből 0-ba ugrás rátája $\lambda_{10} = 60$, mert a feldolgozással eltöltött idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{60}$. A 0-ból 1-be ugrás rátája $\lambda_{01} = 2$, mert ilyen rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek a jelek. Ezek a λ_{ij}-k lesznek a G infinitezimális generátor főátlón kívüli elemei. A főátlót pedig úgy töltjük ki, hogy minden sorösszeg 0 legyen. Így

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 60 & -60 \end{pmatrix}.$$

b.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az egyes állapotok valószínűségei tartanak a (z egyetlen) stacionárius eloszlás szerinti súlyokhoz. 10 óra azaz 600 perc pedig (ilyen ráták mellett) hosszú idő. Ezért keressük a $\pi = (\pi_0\ \pi_1)$ stacionárius eloszlást a $G^T\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{pmatrix} -2 & 60 \\ 2 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avagy a lineáris algebrában szokásos tömör jelöléssel

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 60 & 0 \\ 2 & -60 & 0 \end{array}\right).$$

A két egyenlet egymásnak -1-szerese, így elég mondjuk az elsőt nézni: $-2\pi_0 + 60\pi_1 = 0$, amiből $\pi_0 = 30\pi_1$. Például $\pi_1 = 1$ választással is megkapjuk az egyenletrendszer egy lehetséges megoldását: $\tilde{\pi} = (30\ 1)$. A keresett stacionárius eloszlás ennek olyan konstansszorosa, amiben az elemek összege 1:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{30}{31} & \frac{1}{31} \end{pmatrix}.$$

A Markov láncok alaptétele szerint tehát $\mathbb{P}(X_{600} = 1) \approx \pi_1 = \frac{1}{31} \approx 0.0323$.

c.) A pillanatnyi teljesítményfelvétel a t időpontban $f(X_t)$, ahol az $f : S \to \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség olyan, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 10$. Ezt célszerű oszlopvektorként írni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében $f(X_t)$ időátlaga hosszú távon (1 valószínűséggel) tart az egyetlen π stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{30}{31} & \frac{1}{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{30}{31} \cdot 1 + \frac{1}{31} \cdot 10 = \frac{40}{31} \approx 1.29.$$

7.4 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy háromállapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

c.) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?

d.) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?

Megoldás:

a.) Az egyes állapotokban a tartózkodási idők a feladat szövege szerint exponenciálisak, ahogy annak egy folytonos idejű Markov láncban lenni kell. Ezek paraméterei (rátái) éppen a tartózkodási idő paraméter vektort adják: $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (8, 1, 5)$. Ezek a ráták kerülnek negatív előjellel a G infinitezimális generátor főátlójába. A főátlón kívüli elemekre $G_{ij} = \lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. Ezeket mind beírva

$$G = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0.2 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

b.) Meg kell oldani a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. A lineáris algebrában szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0.8 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{2.\text{ sor}+=1.\text{ sor}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0.8 & 4 & 0 \\ 0 & -0.2 & 5 & 0 \\ 0 & 0.2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Az utolsó egyenlet elhagyható, mert azonos a másodikkal. Az elsőhöz hozzáadjuk a másodikat 4-szer, majd mindkét sort leosztjuk a főátlóbeli elem abszolút értékével:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & -0.2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 25 & 0 \end{array}\right).$$

Vagyis $\pi_1 = 3\pi_3$ és $\pi_2 = 25\pi_3$, amiből az egyenletrendszer egy lehetséges megoldása $\bar{\pi} = (3, 25, 1)$. Ezt lenormálva (hogy az elemek összege 1 legyen)

$$\pi = \left(\frac{3}{29}, \frac{25}{29}, \frac{1}{29}\right).$$

c.) Legyen $S = \{1, 2, 3\}$ az állapottér. Az, hogy az 1-es állapotban eltöltött idő az összes időnek hanyad része, az $f : S \to \mathbb{R}$,

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

megfigyelhető mennyiség időátlaga. Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint az időátlag hosszú távon (1 valószínűséggel) megegyezik a stacionárius eloszlás szerinti átlaggal, vagyis $\pi \cdot f = \pi_1 = \frac{3}{29}$. Hasonlóan hosszú távon a 2-es állapotban az idő $\pi_2 = \frac{25}{29}$, a 3-asban pedig $\pi_2 = \frac{1}{29}$ hányadát tölti.

d.) Ezúttal először a $g : S \to \mathbb{R}$,

$$g = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

függvény időátlagát keressük. Megint csak az ergodtétel értelmében az időátlag hosszú távon egy valószínűséggel $\pi \cdot g = 100\pi_1 + 5\pi_2 + 20\pi_3 = \frac{445}{29}$ (hajszál/óra). Négy hét az $4 \cdot 7 \cdot 24 = 672$ óra, vagyis Mari ezalatt körülbelül $672 \cdot \frac{445}{29} \approx 10312$ hajszálat veszít.

7.5 Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

(a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

(b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

(c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

(d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

(e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

Megoldás:
X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(a) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$G = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

(b) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$,. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

(c) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_t = 0 \,|\, X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

(d) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i \in S} i \cdot \pi_i = 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

(e) A parkoló az idő $\pi_3 = \frac{1}{16}$-ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$-át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0 A_{01} + \pi_1 A_{12} + \pi_2 A_{23} = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$-oda nem parkol le.

7.6 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben.*

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A közbülső állapotokból (1, 2, 3) az elugrás rátája 6, mivel a várható tartózkodási idő $\frac{1}{6}$ perc. Legalul, a 0 állapotban viszont csak ennek $\frac{1}{3}$-a, mert nem elég, hogy csörög az óra, hanem még 5-öst vagy 6-ost is kell dobni, aminek a valószínűsége $\frac{1}{3}$. Úgyanígy legfelül, a 4 állapotban az elugrási ráta $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Vagyis a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (0\,1\,0\,0\,0)$.

b.) 0-ból csak 1-be lehet ugrani, 4-ből csak 3-ba. A többi állapotból $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ugrunk fel és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel le. Így a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c.) A $\underline{\underline{\lambda}}$ ráta-mátrix főátlójában nincs semmi, a tobbi eleme $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. A G infinitezimális generátor ugyanez, csak a főátlója úgy van kitöltve, hogy minden sorösszeg 0 legyen, vagyis

$$G_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{ha } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{ha } i = j \end{cases}.$$

Esetünkben

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hát persze: a lefelé ugrás rátája mindig 4, mert egy óracsörgés és egy 1 és 4 közötti dobás kell hozzá (kivéve legalul); a felfelé ugrás rátája pedig mindig 2, mert egy óracsörgés és egy 5-ös vagy 6-os dobás kell hozzá (kivéve legfelül).

d.) A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4$$

e.) $t = \frac{1}{60}$ rövid idő, ezért a t idejű átmenetmátrix $P(t) \approx P(0) + tP'(0) = I + tG$. Ezen belül $P_{12}(t) \approx 0 + t\lambda_{12} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$. Vagyis

$$\mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{60}\right) = 2 \,\middle|\, X(0) = 1 \right) \approx \frac{1}{30}.$$

f.) Folytonos idejű születési-halálozási folyamatban minden i-re $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1}\lambda_{i+1,i}$. Ebből esetünkben $\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\pi_3}{\pi_4} = 2$; Ebből $\pi_4 = 1$ választással $\tilde{\pi} = (16; 8; 4; 2; 1)$. Ezt lenormálva kajuk az (egyetlen) stacionárius eloszlást:

$$\pi = \pi^{(Y)} = \begin{pmatrix} \frac{16}{31} & \frac{8}{31} & \frac{4}{31} & \frac{2}{31} & \frac{1}{31} \end{pmatrix}.$$

g.) $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű. Ezért a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X(t) = 4 \,|\, X(0) = 1) \approx \pi_4 = \frac{1}{31}.$$

h.) A béka helye az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $f(i) = i$, vagyis vektor-formában $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f$$
$$= \frac{16 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{31} = \frac{26}{31} \approx 0.84$$

7.7 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük **valamelyik**?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?

d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?

e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Ha egy körte ég, annak kiégési rátája a várható élettartam reciproka, esetünkben $1/1 = 1$, vagyis az 1 állapotból a 0 állapotba $\lambda_{10} = 1$ rátával ugrik a rendszer. Ha 2 körte ég, akkor már $1 + 1 = 2$ rátával fog kiégni valamelyik, így $\lambda_{21} = 2$. Ugyanígy $\lambda_{32} = 3$. A gondnok látogatásainak rátája 2, így a 0, 1 és 2 állapotból is $\lambda_{03} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 2$ rátával ugrik a rendszer 3-ba. (Ha a rendszer éppen a 3 állapotban van és jön a gondnok, akkor nem történik semmi.) Más átmenet nem lehetséges, így a ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 2 \\ 1 & * & 0 & 2 \\ 0 & 2 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \end{pmatrix}.$$

(Ennek a főátlójában nincs semmi, mert helyben ugrás nincs.)

b.) Az infinitezimális generátort úgy kapjuk, hogy a $\underline{\underline{\lambda}}$ főátlóját kitöltjük úgy, hogy minden sorösszeg nulla legyen:

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

c.) Legyen tegnap délben a $t = 0$ időpont. Így a kérdés

$$\mathbb{P}(X(\Delta t) = 3 \,|\, X(0) = 2) = P_{23}(\Delta t) = ?$$

ahol $\Delta(t) = \frac{2}{365}$, mert az időt években mérjük, és $P(t)$ a t idejű átmenetmártix. Mivel Δt kicsi (a rendszerbeli tipikus várakozási időkhöz képest), $P(\Delta t) \approx P(0) + \Delta t P'(0) = I + \Delta t G$, ahol I az egységmátrix. Vagyis

$$P_{23}(\Delta t) \approx I_{23} + \frac{2}{365} G_{23} = 0 + \frac{2}{365} \cdot 2 = \frac{4}{365} \approx 0.01 = 1\%.$$

(Más szóval: Két nap alatt a $2 \to 3$ átmenet valószínűsége első közelítésben megegyezik annak valószínűségével, hogy a két nap alatt jön a gondnok, mert már ennek is elég kicsi a valószínűsége – annak meg, hogy több esemény is történik, még sokkal kisebb. A gondnok látogatásának valószínűsége pedig rövid idő alatt ráta · idő.

d.) A kérdés most is

$$\mathbb{P}(X(t) = 3 \,|\, X(0) = 2) = P_{23}(t) = ?$$

de ezúttal $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis (valamint folytonos idejű, így periodikus nem lehet), ezért a Markov láncok alaptétele szerint a $\mathbb{P}(X(t) = 3)$ valószínűséget a stacionárius eloszlás szerinti π_3 valószínűséggel közelíthetjük (a kiinduló állapottól függetlenül), ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Ennek kereséséhez a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3/4 & 0 \end{array}\right)$$

Ezt kiolvasva $\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1$, $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2$, $\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_4$, vagyis pl. $\pi_3 = 4$ választással kapjuk, hogy egy megoldás a $\tilde{\pi} = (1, 2, 3, 4)$ vektor, és persze megoldás ennek minden számszorosa is. Minket az egyetlen normált megoldás érdekel (amire $\sum_{k \in S} \pi_k = 1$), vagyis

$$\pi = \frac{1}{10}\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$

Így a kérdésre a válasz

$$\mathbb{P}(X(20) = 3 \,|\, X(0) = 2) \approx \pi_3 = \frac{3}{10}.$$

e.) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ a „zavaróan sötét van” esemény indikátora, vagyis $f(0) = f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = 0$. Vektor-jelöléssel

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így a $t \in [0,T]$ időtartam alatt a 0 és 1 állapotok valamelyikében eltöltött idő $\int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t$, a kérdés pedig, hogy az idő hány százalékát tölti a rendszer a 0 és 1 állapotok valamelyikében, az $f(X(t))$ időátlaga:

$$\overline{f(X)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t = ?$$

A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint egy valószínűséggel

$$\overline{f(X)} = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f,$$

ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Esetünkben

$$\overline{f(X)} = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}.$$

7.8 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

Megoldás:

a.) A sorban állók száma 0,1,2 vagy 3 lehet, így az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

b.) Egyszerre csak egy gyerek mehet el, és csak egy érkezhet, így ugrani minden állapotból csak szomszédos állapotokba lehet. A felfelé ugrás rátája mindig a gyerekek érkezési folyamatának rátája, vagyis 1 (mert percenként átlag 1 gyerek érkezik). A lefelé ugrás rátája pedig a kiszolgálás rátája, vagyis 2, mert a bácsi percenként átlag 2 gyereket szolgál ki. *FONTOS, hogy a ráta, ami 2, nem egyenlő a kiszolgálási idő várható értékével, ami $\frac{1}{2}$, hanem annak a reciproka.* Így a gráf-reprezentáció

$$0 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 3$$

c.) Ez alapján a ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & 1 & 0 \\ 0 & 2 & * & 1 \\ 0 & 0 & 2 & * \end{pmatrix}.$$

d.) A tartózkodási idő paraméter vektor a ráta-mátrix sorösszegeiből áll, vagy más szóval az egyes állapotokból való elugrás rátáiból:

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

e.) A 2 állapotból való elugrás rátája $\lambda_2 = 3$ vagyis a tartózkodási idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$.

f.) Az egyes irányokba való ugrások valószínűségeit a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa adja meg: $Q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_1}$ ha $i \neq j$, és $Q_{ij} = 0$, ha $i = j$. Most a kérdés csak a 2-ből 3-ba ugrás val.ségére vonatkozott, vagyis a válasz $Q_{23} = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$. De ha már itt tartunk, felírom az egész mátrixot:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

g.) Az infinitezimális generátort úgy kapjuk a ráta-mátrixból, hogy a főátlóba beírjuk a tartózkodási idő paraméter vektor eleminek ellentettjét (vagyis annyit, hogy a sorösszegek nullák legyenek):

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

h.) Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy π stacionárius eloszlás (sorvektor) van, éspedig a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer egyetlen olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. Jelen esetben az egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),$$

aminek a normált megoldása

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

(Az egyenletrendszer megoldásának és a megoldás lenormálásának menetét illetően lásd az előző feladat megoldását, vagy bármelyik lineáris algebra könyvet.)

i.) A Markov lánc folytonos idejű, irreducibilis és véges állapotterű, $t = 120$ perc pedig hosszú idő, ezért a Markov láncok alaptétele értelmében a kezdeti eloszlástól függetlenül

$$\mathbb{P}(X(120) = 3) \approx \pi_3 = \frac{1}{15}.$$

j.) Legyen

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

függvény az állapotéren. Ez éppen a 0 állapot indikátora, így $f(X(t))$ időátlaga éppen azt mondja meg, hogy a sor az idő mekkora hánydában üres. A Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, ezért az ergodtétel értelmében az $f(X(t))$ függvény (idő)átlaga hosszú távon 1 valószínűséggel a stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez tart:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{15}.$$

7.9 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyereket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

a.) A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.

b.) A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$-a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

Megoldás:

a.) Legyen a segítség szerint $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Ennek állapottere $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ugrani csak szomszédos állapotokba lehet, vagyis $X(t)$ születési-halálozási folyamat. A felfelé ugrás, vagyis a gyerekek érkezésének rátája mindig 2, vagyis $\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = 2$. A lefelé ugrás, vagyis a kiszolgálás rátája mindig 1, vagyis $\lambda_{10} = \lambda_{21} = \lambda_{32} = \lambda_{43} = \lambda_{54} = 1$. A többi $\lambda_{ij} = 0$. A gráf-reprezentáció

$$0 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 5$$

A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása mindig olyan, hogy minden i-re (amire ez értelmes) $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$. Esetünkben $i = 0, 1, 2, 3, 4$-re $2\pi_1 = 1\pi_{i+1}$, vagyis az egyetlen stacionárius eloszlás

$$\pi = const \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{63} & \frac{2}{63} & \frac{4}{63} & \frac{8}{63} & \frac{16}{63} & \frac{32}{63} \end{pmatrix}.$$

A fagyis bácsi akkor unatkozik, ha $X(t) = 0$, vagyis az $f : S \to \mathbb{R}$, $f = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ (oszlopvektor) időátlagát keressük. Ez az ergodtétel szerint

$$\overline{f(X)} = \pi f = \pi_0 = \frac{1}{63} \approx 0.016 = 1.6\%.$$

b.) Az állapottér ezúttal $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ végtelen, de $X(t)$ továbbra is születési-halálozási folyamat. A lefelé ugrás rátája továbbra is mindig 1, vagyis $\lambda_{i+1,i} = 1$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$. A felfelé ugrás rátája viszont csak akkor 2, ha legfeljebb 4 gyerek áll a sorban, vagyis $\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = 2$, Ha $i \geq 5$, akkor $\lambda_{i,i+1} = \frac{2}{3}$, mert csak minden harmadik érkező gyerek áll be a sorba. A gráf-reprezentáció ezúttal

$$0 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 5 \underset{1}{\overset{2/3}{\rightleftarrows}} 6 \underset{1}{\overset{2/3}{\rightleftarrows}} 7 \underset{1}{\overset{2/3}{\rightleftarrows}} 8 \cdots$$

Így a $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$ szabály minden $i = 0, 1, 2, \dots$-re érvényes. $i = 0, \dots, 4$-re azt mondja, hogy $\pi_{i+1} = 2\pi_i$, viszont $i \geq 5$-re azt, hogy $\pi_{i+1} = \frac{2}{3}\pi_i$. Vagyis az egyetlen stacionárius eloszlás, ha létezik,

$$\pi = c\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \frac{64}{3} & \frac{128}{9} & \dots & \frac{2^i}{3^{i-5}} & \dots \end{pmatrix}.$$

Esetünkben létezik, mert a vektorban szereplő számok összege véges:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &:= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \frac{64}{3} + \frac{128}{9} + \dots + \frac{2^i}{3^{i-5}} + \dots = \\ &= 31 + 32\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = 31 + \frac{32}{1 - \frac{2}{3}} = 127 < \infty. \end{aligned}$$

Az ergodtétel állítása ebben az esetben is érvényes az $f = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)^T$ függvényre, vagyis a fagyis bácsi az idő

$$\overline{f(X)} = \pi f = \pi_0 = \frac{1}{127} \approx 0.8\%$$

-ában unatkozik.

7.10 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

f.) A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0;1;2;3;4;5\}$. Átmenet csak a közvetlen szomszédok között lehet, A felfelé ugrás rátája mindig éppen a beérkező feladatok folyamatának rátája, vagyis 2. A lefelé ugrás rátája az exponenciális kiszolgálási idő paramétere, vagyis várható értékének reciproka, esetünkben 4. Kivétel a 0 állapot, ahonnan nincs lefelé ugrás, és az 5 állapot, ahonnan nincs felfelé ugrás. A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 1 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 2 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 3 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 4 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 5$$

b.) A ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix},$$

a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

c.) Az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

d.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével a tartózkodási valószínűségek az egyetlen stacionárius eloszlással közelíthetők. Ezért kiszámoljuk a stacionárius eloszlást, vagyis megoldjuk a $G^T\pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszert, ahol a π sorvektor a stacionárius eloszlás (a transzponáltja pedig oszlopvektor). Pontosabban: ennek a lineáris egyenletrendszernek a végtelen sok megoldása közül azt az egyet keressük, amelyik valószínűségeloszlás (vagyis az elemek összege 1). Az egyenletrendszer:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

ennek normált megoldása pedig

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{32}{63} & \frac{16}{63} & \frac{8}{63} & \frac{4}{63} & \frac{2}{63} & \frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbb{P}(X_{120} = 2 \,|\, X_0 = 0) \approx \pi_2 = \frac{8}{63} \approx 0.127$$

e.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény annak az indikátora, hogy a rendszer a 0 állapotban, vagyis üresjáratban van. Oszlopvektor formájában írva

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében f időátlaga majdnem biztosan konvergál az egyetlen stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez, vagyis $\sum_{i\in S} \pi_i f_i = \pi f = \frac{32}{63}$-hoz. Tehát a rendszer hosszú távon az idő $\frac{32}{63}$-át tölti üresjáratban.

f.) Azt kell kitalálnunk, hogy a beérkező feladatok hanyad része érkezik pont olyankor, amikor a rendszer az 5 állapotban van. Mivel a feladatok érkezési rátája független a rendszer állapotától, ez pontosan annyi lesz, amekkora hányadát az időnek a rendszer az 5 állapotban tölti. Ez pedig az előző ponthoz hasonlóan $\pi_5 = \frac{1}{63}$, vagyis hosszú távon a beérkező feladatok $\frac{1}{63}$-ada vész el.

7.11 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban akárhány feladat lehet. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$. Átmenet csak a közvetlen szomszédok között lehet, A felfelé ugrás rátája mindig éppen a beérkező feladatok folyamatának rátája, vagyis 2. A lefelé ugrás rátája az exponenciális kiszolgálási idő paramétere, vagyis várható értékének reciproka, esetünkben 4. Kivétel a 0 állapot, ahonnan nincs lefelé ugrás. A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 1 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 2 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 3 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 4 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} \cdots$$

b.) A ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & * & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & \dots \end{pmatrix},$$

a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/4 & 0 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

c.) Az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

d.) A π stacionárius eloszlás végtelen sorvektor, a születési-halálozási folyamat sajátossága miatt eleget kell tennie a $2\pi_k = 4\pi_{k+1}$ egyenletnek *minden* $k = 0, 1, 2 \dots$*-re*. Ebből kiolvasható, hogy *ha van stacionárius eloszlás*, akkor az csak olyan lehet, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\pi_k = \frac{\pi_0}{2^k}. \tag{3}$$

A kulcskérdés, ami megkülönbözteti a végtelen állapottér esetét a végestől, az, hogy vajon van-e olyan 1*-re felösszegződő* nemnegatív számsorozat, ami ennek eleget tesz, vagyis π_0 megválasztható-e úgy, hogy

$$\sum_{k \in S} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_0}{2^k} = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

legyen. Szerencsére esetünkben a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ sor *véges*, konkrétan $= 2$, vagyis $\pi_0 = \frac{1}{2}$ választással a (3) egyenlet tényleg stacionárius eloszlást ad. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \cdots \end{pmatrix}.$$

(Vagyis $\pi = PessGeom\left(\frac{1}{2}\right)$ pesszimista geometriai eloszlás.) A végtelen állapotterű születési-halálozási folyamatok stabilitásáról szóló tétel szerint ez tényleg az egyetlen stacionárius eloszlás, a t időbeli eloszlások ehhez konvergálnak. Tehát

$$\mathbb{P}(X_{120} = 2 \mid X_0 = 0) \approx \pi_2 = \frac{1}{8} = 0.125$$

e.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény annak az indikátora, hogy a rendszer a 0 állapotban, vagyis üresjáratban van. Oszlopvektor formájában írva

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

A végtelen állapotterű születési-halálozási folyamatokra vonatkozó ergodtétel értelmében f időátlaga majdnem biztosan konvergál az egyetlen stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez, vagyis $\sum_{i \in S} \pi_i f_i = \pi f$-hez (ha az átlagolandó függvény olyan, hogy ez a várható érték létezik). Esetünkben hosszú távon az idő $\pi f = \pi_0 = \frac{1}{2}$ részében lesz a gép üresjáratban.