

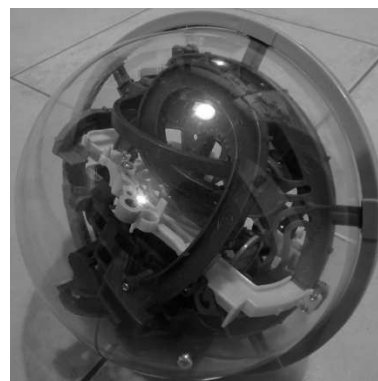
Tömegkiszolgálás
mintaZH, 2020 tavasz

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

1. Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X -szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y -nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?
2. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet előlről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei 0, 1, 2, 3.



Magical Intellect Ball

- a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.
 - b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?
 - c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?
3. Legye $N \sim Geom(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim Geom(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?
 4. Pistike minden délelőtt tönkretesz egy játékautót a kisautós dobozából (már amikor van benne), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután érmedobással dönt arról, hogy elmenjen-e a játékboltba, ha pedig elmegy, akkor megint csak érmedobással dönt arról, hogy 1 vagy 2 játékautót vegyen Pistikének, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba. (Vagyis minden délután $\frac{1}{4}$ val.séggel 1, $\frac{1}{4}$ val.séggel 2 játékautó érkezik.)
 - (a) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?
 - (b) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?
 - (c) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?
 - (d) Tegnap este az anyuka betett egy vagy két autót az *üres* dobozba. Várhatóan (vagyis: várható értékben) hány nap múlva lesz a doboz újra üres?

5. Róbert közrendőrnek 10 parancsnoka van, sorrendben 1., 2., ..., 10. számú parancsnok. Minden parancsnok, minden percben, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{20}$ valószínűséggel ad Róbertnek parancsot (mindenki csak 1-et). Ő azonban minden percben csak 1 parancsot tud végrehajtani. Ha több végre nem hajtott parancs is van nála, akkor azt hajtja végre, amelyik a legmagasabb rangú (vagyis legkisebb sorszámú) parancsnoktól jött, a többit halogatja. (Az időt egész percekben mérjük. Tegyük fel, hogy egy parancsot leghamarabb az érkezését követő percben lehet végrehajtani.)
- a.) Hosszú távon átlagosan hány végre nem hajtott parancs van Róbert zsebében az 5. számú parancsnokától?
- b.) Hosszú távon átlagosan hány perc után hajtja végre Róbert a 5. számú parancsnoktól érkezett parancsokat?