Tömegkiszolgálás

pótZH megoldások **és pontozás**, 2020 tavasz, 2020.05.20, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Pontozás általában:

- Minden feladat 9 pontot ér.
- A részpontszámok részletezve vannak az egyes megoldások után.
- Fő szabály: Ha valaki rossz irányba indul el – pl. hibásan ismeri fel az alkalmazandó modellt – és aztán a rossz irányban sok szép dolgot kiszámol, azért nem jár pont.
- Különösen vonatkozik ez arra, ha valaki olyat számol ki, ami a helyes megoldáshoz nem kell – pl. a 3 c.) feladatban az Y generátorfüggvényét.

1. a.) Jancsika 3-szor dob egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy a legnagyobb dobása 3-nál nagyobb? *(Tipp: legyen X a 3-nál nagyobb dobások száma.)*

   b.) Jancsika k-szor dob egy szabályos dobókockával, ahol $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a legnagyobb dobása k-nál nagyobb?

   c.) Pistike dob egy szabályos dobókockával. Az eredményt jelöljük N-nel. Ezután Jancsika N-szer dob egy szabályos dobókockával. Jelöljük M-szel a Jancsika által dobott számok legnagyobbikát. Mennyi a $\mathbb{P}(M > N)$ valószínűség?

   Megoldás:

a.) Legyen X a 3-nál nagyobb dobások száma.
Mind a 3 próbálkozás egymástól függetlenül $\frac{3}{6}$ val-séggel sikerül 3-nál nagyobbra, X pedig a sikerek száma $\Longrightarrow X \sim Bin(3, \frac{3}{6})$.

Így $\mathbb{P}$(legnagyobb dobás 3-nál nagyobb) =

$$= \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{3}{6}\right)^0 \left(1-\frac{3}{6}\right)^{3-0} = 1 - \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

b.) <u>Ugyanígy</u>: legyen most X a k-nál nagyobb dobások száma. $X \sim Bin(k, \frac{6-k}{6})$

$\Rightarrow \mathbb{P}$(legnagyobb dobás k-nál nagyobb) $= 1 - \mathbb{P}(X=0) =$

$$= 1 - \binom{k}{0}\left(\frac{6-k}{6}\right)^0 \left(\frac{k}{6}\right)^{k-0} = \underline{\underline{1 - \left(\frac{k}{6}\right)^k}}.$$

[persze: $\left(\frac{k}{6}\right)^k$ val-séggel lesz minden dobás legfeljebb k.]

c.) A b) pont szerint $\mathbb{P}(M > N \mid N=k) = 1 - \left(\frac{k}{6}\right)^k$.

Ebből a <u>teljes valószínűség tételével</u>

$$\mathbb{P}(M>N) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(M>N \mid N=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{k}{6}\right)^k\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \left(\frac{6}{6}\right)^6\right] \approx \underline{\underline{0.66630}}$$

Pontozás:

a.) 2 pont

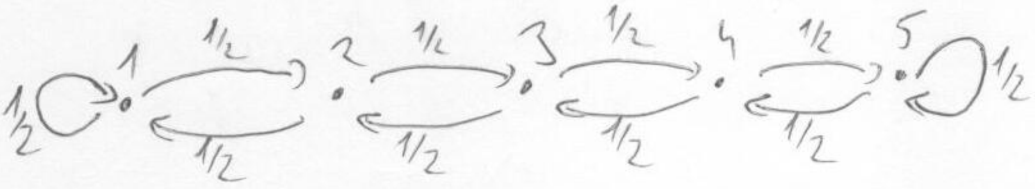
b.) 1 pont

c.) 6 pont, ebből 2 a teljes valószínűség tétel néven nevezése

2. Egy hallgató egy maratoni szóbeli vizsgán 2-esről indul. Az oktató sorban teszik fel neki a kérdéseket. Ha helyesen válaszol, a jegye 1-gyel javul (hacsak nem 5-ösre áll, mert akkor nem változik). Ha hibásan válaszol, akkor a jegye 1-gyel romlik (hacsak nem 1-esre áll, mert akkor nem változik. A hallgató minden kérdésre az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszol helyesen. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 100 kérdés után ötösre áll?

   Megoldás:

Legyen X_n a hallgató jegye (mármint, hogy hanyasra áll) n kérdés után. X_n Markov lánc, gráf-reprezentációja



A kérdés a $\mathbb{P}(X_{100}=5 \mid X_0=2)$ valószínűség.

A Markov lánc irreducibilis és aperiodikus (mert a végpontokban van helyben ugrás) és véges állapotterű

$\Rightarrow$ stabil, $n=100$ hosszú idő

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{100}=5 \mid X_0=2) \approx \pi_5$ ahol π az egyetlen stac. eloszlás.

Mivel X_n születési-halálozási folyamat, a stac eloszlás könnyen leolvasható:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 \text{ , normálás után}$$

$$\pi = \left(\frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5}\right) \text{ egyenletes.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X_{100}=5 \mid X_0=2) \approx \pi_5 = \frac{1}{5}} = 20\%$$

Pontozás:

- 1 pont a Markov lánc bevezetése
- 1 pont a gráf-reprezentáció vagy az átmenetmátrix
- 2 pont a stabilitás feltételeinek felsorolása
- 3 pont a stac.eloszlás megkeresése

- 2 pont a helyes válasz

3. Móricka dobókockája hamis: a számok 1-től 6-ig vannak rajta, de a k valószínűsége $\frac{k}{21}$ ($k = 1, 2, \ldots, 6$). Legyen egy dobás eredménye X.

   a.) Írjuk fel X generátorfüggvényét!

   b.) Mennyi az $\mathbb{E}X$ várható érték?

   c.) Móricka addig dobál a kockájával, amíg kétszer egymás után ki nem jön a hatos. Legyen a szükséges dobások száma Y, ennek generátorfüggvénye g_Y. Mennyi a $g_Y(0)$ függvényérték?

Megoldás:

a.)

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{k}{21} \qquad k = 1, 2, \ldots, 6$$

$$\Rightarrow g_X(z) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k) z^k = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{21} z^k = \frac{z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6}{21}$$

[Nem túl fontos/hasznos, de ezt lehet „szebb" alakra hozni:

$$g_X(z) = \frac{z}{21}\left[1 + 2z + 3z^2 + \ldots + 6z^5\right] = \frac{z}{21}\left(z + z^2 + \ldots + z^6\right)' =$$

$$= \frac{z}{21}\left(\frac{z - z^7}{1-z}\right)' = \frac{z}{21}\,\frac{(1-7z^6)(1-z) + (z-z^7)}{(1-z)^2} = \frac{1-7z^6-6z^7}{(1-z)^2}\,\frac{z}{21}\Bigg]$$

b.) Kár a generátorfüggvénnyel bajlódni:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \frac{1}{21}\left[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36\right] = \frac{91}{21}$$

$$= \frac{13}{3} = 4.33\dot{3}$$

c.) $g_Y(0) = \mathbb{P}(Y=0) = 0$, mert 1 dobásra legalább szükség van. (Sőt kettőre is.)

Pontozás:

a.) 3 pont

b.) 3 pont

c.) 3 pont

4. Alfréd bácsi orvosi rendelőjéhez a betegek szabályos időközönként érkeznek az előjegyzett időpontjukra: 8:00-tól kezdve minden 15 percben 1 beteg. A betegek pontosan érkeznek: 8:00-kor, 8:15-kor, 8:30-kor, stb.

   Alfréd bácsi pontosan az érkezési idő után 1 perccel hívja be a betegeket (8:01-kor, 8:16-kor, 8:31-kor, stb.), és minden beteget pontosan 10 perc alatt lát el (a mardék időben a rendelőt fertőtleníti). Ám sajnos néha más dolga is van: minden egyes negyedórában, az előzményektől függetlenül $\frac{5}{6}$ valószínűséggel lát el beteget, a maradék $\frac{1}{6}$ valószínűséggel azonnali minisztériumi adatigénylésre kell válaszolnia. Ilyenkor a betegek türelmesen várnak a váróteremben.

   Szerencsére nem minden beteg jelenik meg: mindegyik, az előzményektől függetlenül, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jön el (a többi nem értesült az időpontjáról).

   Vilma néni estefelé érkezik az előjegyzett időpontjára, depressziós tünetekkel. Körülbelül mekkora valószínűséggel üres érkezésekor a váróterem? (Persze úgy értve, hogy az érkezése előtt közvetlenül.)

   Megoldás:

Legyen X_n a váróteremben a sor hossza az n-edik érkezési időpont után közvetlenül (8:00:01-kor, 8:15:01-kor, stb.) Erre érvényes a szokásos

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$$ evolúciós egyenlet, ahol

$V_{n+1} \sim B(p)$, $p = \frac{5}{6}$ az ellátható betegek száma az n-edik negyedórában

$Y_n \sim B(q)$ $q = \frac{4}{6}$ az érkező betegek száma az n-edik időpontra.

Vagyis ez egy „bináris-bináris modell", stabil, mert $q < p$.

Legyen $\tilde{X}_k$ a sor hossza közvetlenül a k-adik beteg érkezése után!

A kérdés $\mathbb{P}(\tilde{X}_k = 1) \approx ?$, amikor k nagy,

ami a stabilitás miatt $\approx \mathbb{P}(\tilde{X}^{stac} = 1)$.

[VIGYÁZAT: ÉS NEM pedig $\mathbb{P}(X^{stac} = 0)$!!]

A 11. előadásjegyzet 9. oldal tétele szerint

$\tilde{X}^{stac} \sim Geom(\alpha)$ ahol $\alpha = 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ esetünkben $1 - \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}\frac{2}{6}} = \frac{6}{10} = 0.6$

tehát $\boxed{\mathbb{P}(\tilde{X}^{stac} = 1) = \alpha = 0.6}$

Pontozás:

- 1 pont a sorhossz-modell felírása,
- 1 pont a stabilitás ellenőrzése
- 4 pont a helyes kérdés felismerése
- 2 pont a megfelelő tétel alkalmazása
- 1 pont a helyes válasz megadása

5. Juliskának tíz főnöke van. Minden nap minden főnök feldob egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 1-es, akkor ad Juliskának 1 napra való munkát. Átlagosan hány nap alatt hajtja végre Juliska a rá bízott feladatokat hosszú távon? (Juliska minden nap 1 napra való munkát tud elvégezni.)

Megoldás:

Juliska elvégzésre váró feladatai egy kiszolgálási sorban állnak: naponta $V_n \equiv 1$ napi munkát végez el

és $Y_n \sim Bin(10, \frac{1}{6})$ napra való feladatot kap.

Mivel $EY = \frac{10}{6} > 1 = EV$, a ~~sz~~ rendszer

instabil, a sorhossz ∞-hez tart,

az átlagos késleltetés $\boxed{\text{végtelen}}$.

Pontozás:

- 1 pont a sorhossz-modell felírása,
- 1 pont az $\mathbb{E}Y$ kiszámolása
- 4 pont a stabilitás vizsgálata
- 3 pont a helyes válasz