Tömegkiszolgálás

pótpótZH megoldások, 2020 tavasz, 2020.05.27, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója. Tőle viszont **bátran** lehet kérdezni: +36-20-5372256

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Pontozás általában:

- Minden feladat 9 pontot ér.
- A részpontszámok részletezve vannak az egyes megoldások után.
- Fő szabály: Ha valaki rossz irányba indul el – pl. hibásan ismeri fel az alkalmazandó modellt – és aztán a rossz irányban sok szép dolgot kiszámol, azért nem jár pont.
- Különösen vonatkozik ez arra, ha valaki olyat számol ki, ami a helyes megoldáshoz nem kell.

1. Pistike, ha kap egy Tömegkiszolgálás házi feladatot, azt véletlen idő alatt oldja meg, ami exponenciális eloszlású. Az átlagos megoldási idő 48 óra. Az előadó egy feladat kitűzése után 48 órával ránézett a Moodle-re és azt látta, hogy Pistike már megoldotta. Mennyi a valószínűsége, hogy már 24 óra elteltével is kész volt?

   Megoldás:

   Legyen X a megoldási idő napokban: $X \sim Exp(\lambda)$,

   $$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} = 2, \text{ vagyis } \lambda = \frac{1}{2}$$

   ~~Ekkor~~
   A kérdés egy feltételes val.ségre vonatkozik:

   $$\mathbb{P}(X<1 \mid X<2) = \frac{\mathbb{P}(X<1 \text{ és } X<2)}{\mathbb{P}(X<2)} = \frac{\mathbb{P}(X<1)}{\mathbb{P}(X<2)} =$$

   $$= \frac{1-e^{-\lambda\cdot 1}}{1-e^{-\lambda\cdot 2}} = \frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-1}} \approx 0.622$$

   Pontozás:

   - 1 pont a jelölés bevezetése
   - 1 pont az eloszlás paraméterének leolvasása

- 4 pont a kérdés mint feltételes valószínűség értelmezése
- 2 pont a szükséges feltétel nélküli valószínűségek kiszámolása
- 1 pont a helyes válasz

2. Jancsika a Tömegkiszolgálás pótpótZH-ra gyakorol: ugyanannak az 5 kérdésből álló, a Moodle által automatikusan javított gyakorló feladatnak fut neki újra és újra. A Moodle minden válasz után azonnal jelzi, hogy a megoldás helyes-e. Ha hibás, akkor Jancsika újra próbálkozik ugyanazzal a kérdéssel, ha pedig helyes, akkor továbblép a következőre (illetve, ha az utolsónál járt, akkor elölről kezdi).

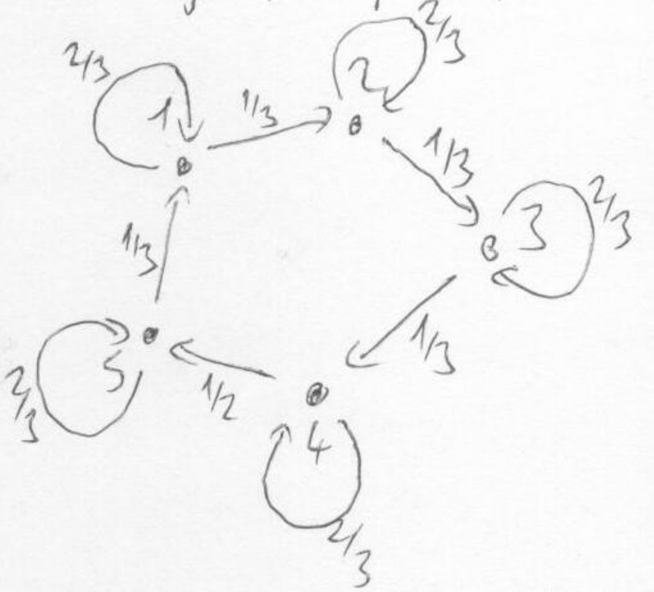
   Jancsika nem fejlődik: minden alkalommal, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel válaszol helyesen a kérdésre.

   A munkát az első kérdéssel kezdi. Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy 100 próbálkozás után ismét az első kérdésnél tart?

   Megoldás:

Legyen X_n az, hogy hanyadik ~~feladatnál~~ kérdésnél jár n próbálkozás után.

X_n időben homogén Markov lánc az $S=\{1,2,3,4,5\}$ állapottéren. A gráf-reprezentációja



X_n véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus

$\Rightarrow$ stabil, a kérdéses $n=100$ hosszú idő

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{100}=1 \mid X_0=1) \approx \pi_1$ ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás.

A gráf forgatási szimmetriájából látható, hogy

$\pi = \left(\frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5}\right)$ egyenletes eloszlás.

[Ez ellenőrizhető is: $\pi P = \pi$, ha P az átmenetmátrix]

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X_{100}=1 \mid X_0=1) \approx \pi_1 = 0{,}2 = 20\%}$

Pontozás:

- 2 pont a jelölés bevezetése, Markov tulajdonság megállapítása
- 2 pont a gráf-reprezentáció vagy átmenetmátrix
- 2 pont a stabilitás feltételeinek ellenőrzése
- 2 pont a stac.eloszlás megtalálása
- 1 pont a helyes válasz

3. Juliska a pótlási héten egy nap alatt átlag 5 pót-házifeladatot old meg, a számuk Poisson eloszlású. Minden feladatot $\frac{2}{3}$ valószínűséggel old meg helyesen, függetlenül a többitől (és attól is, hogy hány feladatot old meg aznap). Mennyi a valószínűsége, hogy csütörtökön legalább 3 feladatot helyesen megold?

1. Megoldás:

Legyen $X \sim Poi(5)$ a megoldott feladatok száma,

Y pedig a helyesen megoldott feladatok száma.

Y az X ritkítása $p = \frac{2}{3}$ túlélési valószínűséggel

(Lásd 9. előadásjegyzet 10. oldal)

$$\Rightarrow Y \sim Poi\left(5 \cdot \frac{2}{3}\right) = Poi\left(\frac{10}{3}\right).$$

Ezért

$$\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - e^{-\frac{10}{3}}\left(1 + \frac{10}{3} + \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{2}\right) \simeq 0.647$$

2. Megoldás:

Legyen $X \sim Poi(5)$ a megoldott feladatok száma,

Y pedig a <u>helyesen</u> megoldott feladatok száma.

Legyen $\xi_i := \begin{cases} 1, \text{ ha az } i\text{-edik feladatot helyesen oldja meg} \\ 0, \text{ ha nem.} \end{cases}$

Ekkor $\xi_i \sim B\left(\frac{2}{3}\right)$ és

$X = \sum_{i=1}^{Y} \xi_i$ véletlen tagszámú összeg.

X generátorfv-e $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$ ahol $\lambda = 5$

ξ_i —"— $g_\xi(z) = 1 - p + pz$, ahol $p = \frac{2}{3}$

Y generátorfv-e $g_Y(z) = g_X(g_\xi(z)) = e^{\lambda(1-p+pz-1)} = e^{\lambda p(z-1)}$

9. ea-jegyzet 6. oldal tétele

$\Rightarrow Y \sim Poi(\lambda p)$, ezért, mivel $\lambda p = \frac{10}{3}$,

$$\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - e^{-\frac{10}{3}}\left(1 + \frac{10}{3} + \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{2}\right) \simeq 0.647$$

Pontozás:

- 2 pont a megfelelő jelölések helyes bevezetése
- 3 pont annak megállapítása, hogy a Poisson eloszlás ritkításáról vagy véletlen tagszámú összegről van szó
- 2 pont a helyesen megoldott HF-ek számának eloszlásának megállapítása
- 2 pont a végeredmény kiszámolása

4. Móricka kurzusára 20 hallgató jár. Minden hallgató minden nap, egymástól és az előzményektől is függetlenül, 4% valószínűséggel ír egy (és csak egy) e-mailt Mórickának, szigorúan nappal. Móricka naponta pontosan 1 e-mailre válaszol (már ha éppen van mire), éspedig 23:00-kor. Hosszú távon átlagosan hány megválaszolatlan hallgatói levél van Móricka postaládájában *éjfélkor*?

   (Vigyázat: éjfélkor!)

   Megoldás:

Legyen X_n a megválaszolatlan levelek száma az n-edik napon $\boxed{\text{este 10-kor}}$, vagyis az aznapi levelek $\boxed{\text{érkezése}}$ $\boxed{\text{után}}$ (de még a kiszolgálás előtt). Erre érvényes az

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$$ sorhossz-evolúciós egyenlet,

ahol $V_{n+1} \equiv 1$ az n-edik napon megválaszolható levelek száma,

$Y_{n+1} \sim \text{Bin}\left(M=20, p=\frac{4}{100}\right)$ az ~~n+1-edik~~ $n+1$-edik napon érkező levelek száma.

Mivel $\mathbb{E}Y = Mp = 0.8 < 1 = \mathbb{E}V$, a rendszer stabil, határeloszlásáról tudjuk a sorhossz várható értékét:

$$\mathbb{E}X^{stac} \underset{\text{2. oldal}}{\overset{\text{7. ea-jegyzet}}{=}} \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\text{Var}Y}{2(1-\mathbb{E}Y)}$$, vagy még inkább

$$\mathbb{E}X^{stac} \underset{\substack{\text{2. oldal,} \\ \text{egyszerű csomag-} \\ \text{koncentrátor}}}{\overset{\text{8. ea-jegyzet}}{=}} \frac{Mp}{2} + \frac{Mp(1-p)}{2(1-Mp)} = \frac{0.8}{2} + \frac{0.8 \cdot 0.96}{2 \cdot 0.2} = 2.32$$

Sajnos azonban NEM EZ A KÉRDÉS:

Legyen Z_n a levelek száma az n-edik napon $\boxed{\text{éjfélkor}}$.
$\mathbb{E}Z^{stac}$-ra nincs előre gyártott képletünk, ezért egy kicsit gondolkodni kell:

$$Z_n = \begin{cases} X_n - 1, & \text{ha } X_n \geq 1 \text{, mert akkor 23:00-kor egy levelet megválaszol} \\ 0 & \text{, ha } X_n = 0 \text{, persze.} \end{cases}$$

Vagyis $Z_n = X_n - \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}}$,

amiből $\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} = \mathbb{E}X_n - \mathbb{P}(X_n \geq 1)$

$= \mathbb{E}X_n - (1 - \mathbb{P}(X_n = 0))$.

Ezekre már van kész képlet a stacionárius esetben:

$\cancel{\mathbb{E}X_n} = \mathbb{E}X^{stac} = 2.32$ már volt az előbb

$$\mathbb{P}(X^{stac} = 0) \overset{\text{7. előadás segítségével}}{\underset{\text{6. oldal}}{=\!=\!=}} 1 - \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V} = 1 - Mp = 1 - 0.8$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}Z^{stac} = \mathbb{E}X^{stac} - 0.8 = \underline{\underline{1.52}}.$$

Mivel a rendszer stabil, az ergodtétel értelmében hosszú távon átlagosan $\underline{\underline{\mathbb{E}Z^{stac} = 1.52}}$ levél vár válaszra éjfélkor.

Pontozás:

- 2 pont a sorhossz-modell felírása
- 2 pont annak felismerése, hogy a kérdés miben tér el az előadáson tárgyalt modelltől
- 2 pont az érkezések utáni átlagos sorhossz kiszámolása
- 2 pont az áttérés a kiszolgálás utáni sorhosszra
- 1 pont a hivatkozás az ergodtételre a hosszú távú időátlag kiszámolásához

5. Józsika rengeteg egymásra épülő házi feladatot old meg, naponta 1-et. (Reggel kezdi el, éjfélkor adja be). Minden megoldást $\frac{1}{10}$ valószínűséggel ront el, az előzményektől függetlenül (feltéve

persze, hogy a korábbi feladatai jók). A tanára a javítással késésben van: minden feladatról a beadás után 10 nappal (éjfélkor) jelez vissza, hogy jó-e. Ha rossz, akkor Józsika kénytelen visszaugrani az adott feladatra, és onnan folytatni az egész sorozatot. Napi átlagban hány feladatot tud Józsika *helyesen* megoldani hosszú távon?

Megoldás:

Józsika tevékenysége megfelel a zajos csatornán való csomagküldésnek $\boxed{\text{Go-Back-N}}$ protokoll szerint:

1 feladat ~~...~~ felel meg 1 bitnek

a küldési sebesség $1 \frac{\text{bit}}{\text{nap}}$ (az időegység 1 nap)

az adatbitek száma csomagonként $N = 1$

a kísérő bitek száma $M = 0$

a hiba-valószínűség $p_b = \frac{1}{10}$

a nyugta késleltetése $K = 10$ (napban számolunk).

Így az elérhető átviteli kapacitás a 12. előadás-jegyzet 13. oldaláról

$$r = \frac{N(1-p_b)^{M+N}}{M+N+K\left[1-(1-p_b)^{M+N}\right]} = \frac{1\left(1-\frac{1}{10}\right)^{0+1}}{0+1+10\left[\underbrace{1-0.9^{0+1}}_{1/10}\right]} = \frac{0.9}{2} \cancel{10} = 0{,}45$$

Vagyis Józsika napi átlagban hosszú távon

$\boxed{r = 0{,}45}$ feladatot tud helyesen megoldani.

Pontozás:

- 3 pont a Go-Back-N felismerése
- 4 pont a paraméterek helyes leolvasása

- 2 pont a kapacitás kiszámolása