Csomagkoncentrátorek

Egy kommunikációs csatornán a csomagokat/üzeneteket csak egyesével lehet átküldeni, de a csatornát többen is szeretnék használni. Erre nézünk néhány disztrét idejű Markov modellt.

1) Egyszerű csomagkoncentrátor

Az idő $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Az érkező igényeket egyetlen sorba állítjuk, ennek hossza n-kor X_n, és minden időszakban (vagyis $t=n$-től $t=n+1$-ig) pontosan 1-et ~~küldünk tová~~ továbbítunk/szolgálunk ki (már ha van mit továbbítani).

ezek függetlenek!

Az $(n, n+1]$ időszakban érkező igények száma legyen Y_{n+1}, ezeket leghamarabb a következő időszakban tudjuk kiszolgálni, pont ahogy a sorhossz evolúciós egyenleténél volt.

Így itt is teljesül az evolúciós egyenlet:

$$X_{n+1} = (X_n - V_n)_+ + Y_{n+1} \qquad \text{ahol } V_n \equiv 1$$

$$= (X_n - 1)_+ + Y_{n+1}$$

$$= X_n + Y_{n+1} - \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}}$$

A korábbi stabilitási tételből tudjuk, hogy X_n akkor és csak akkor stabil, ha $\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V = 1$, és ilyenkor

$$\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\mathrm{Var}\,Y}{2(1-\mathbb{E}Y)},$$

illetve a Little formulából

$$\bar{D} = \frac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{Var}\,Y}{2\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y)}$$

Két egyszerű spec. eset:

a.) Sok felhasználó mindegyike egymástól függetlenül, kicsi val. séggel küld igényt: ekkor $Y \sim Poi(\lambda)$, a stabilitás feltétele $\lambda < 1$, ekkor

$$\mathbb{E}X^{stac} = \lambda\frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}, \quad \bar{D} = \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}$$

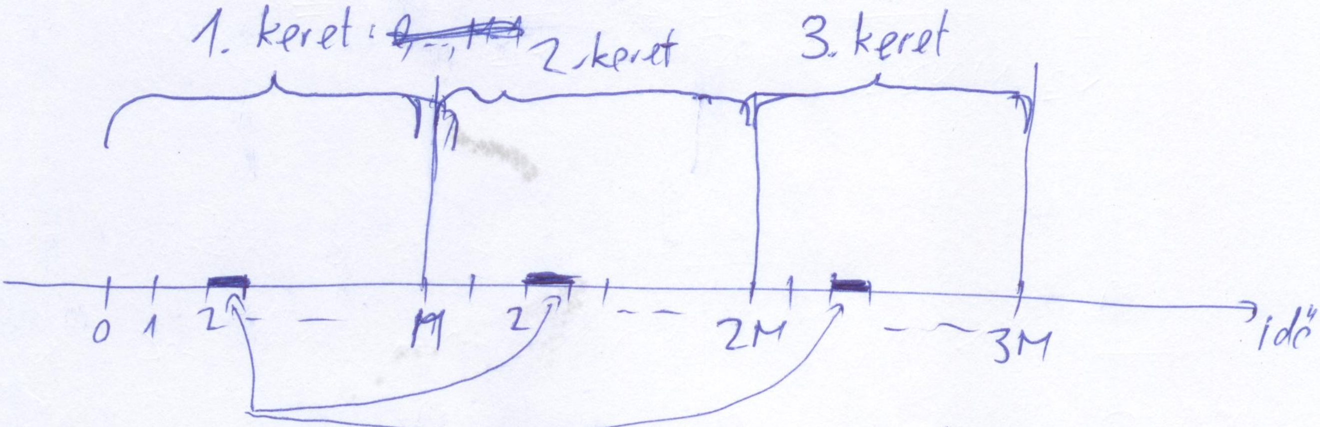
b.) M felhasználó mindegyike egymástól függetlenül, azonos p val. séggel küld csomagot, ekkor $Y \sim Bin(M,p)$, a stabilitás feltétele $Mp < 1$, és ekkor

$$\mathbb{E}X^{stac} = \frac{Mp}{2} + \frac{Mp(1-p)}{2(1-Mp)}, \quad \boxed{\bar{D}_{mux} := \bar{D} = \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-Mp)}}$$

mux mint „multiplexer”

② Időosztás

M db felhasználó ~~mindegyike~~ szeretne csomagot küldeni, az időt felosztjuk közöttük: M db „időrés" alkot egy „keretet", és minden keretben minden felhasználó 1 rést kap:



a 3. felhasználó csak ekkor forgalmazhat.

Tegyük fel most is, hogy minden felhasználónak minden időrésben p val.séggel keletkezik csomagja (nem csak a saját időrésében), ezért kénytelen saját maga sorba állítani őket: $\boxed{\text{M db sor lesz}}$: $X_{1,n}, \ldots X_{M,n}$

Így persze az ~~egym~~ egyes sorok egymástól függetlenül fejlődik, és mindenki (külön-külön) úgy látja, mintha egyetlen $\boxed{\text{idő}\cancel{\text{keret}}\text{rés}}$ lenne ~~...~~ $\boxed{\cancel{\ast}\ M}$ hosszú.

Minden résben pont 1 csomagot továbbítunk (ha van).

Legyen ezért pl. $X^*_k = X_{1,kM}$ az első felhasználó sorhossza úgy, hogy csak M időnként (keretenként egyszer) nézünk rá.

Ez pont az <u>egyszerű</u> csomagkoncentrátor szabálya szerint fejlődik: $X^*_{k+1} = \left(X^*_k - V^*_{k+1}\right)_+ + Y^*_{k+1}$,

ahol $V^*_{k+1} \equiv 1$, $Y^*_{k+1} \sim Bin(M,p)$.

~~Így a sorhossz ugyanaz az átlagos sorhossz ugyanaz, mint~~

Így a <u>stabilitás</u> feltétele most is $Mp < 1$: ez ugyanaz, mint az egyszerű koncentrátornál.

- Az átlagos sorhossz most ~~$E(X^{*stac})$~~ is

$$E\left(X^{*stac}\right) = \frac{Mp}{2} + \frac{Mp(1-p)}{2(1-Mp)}$$

, de most <u>M darab</u> sor van, vagyis átlagosan M-szer ennyien állnak sorban.

- Az átlagos késleltetés most is $\overline{D}^* = \overline{D}_{mux} = \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-Mp)}$, de nem résben, hanem <u>keretben</u> számolva, vagyis résben mérve

$$\boxed{\overline{D}_{time} = M\overline{D}^* = M\overline{D}_{mux}} = \frac{M}{2} + \frac{M(1-p)}{2(1-Mp)}$$

Cserébe az időosztás előnye, hogy nem igényel központi kiszolgálót. (Azt persze valakinek ki kell osztani, hogy ki mikor forgalmazhat. Később látunk majd olyat, amikor ez sem kell.)

3 Prioritásos csomagkoncentrátor

Minden csomagon van egy „prioritás" címke, ami M féle lehet: $1, 2, \ldots, M$

↑ legmagasabb ↑ legalacsonyabb prioritás.

A magasabb prioritású (kisebb indexű) csomagok <u>beelőzik</u> az alacsonyabb prioritásúakat az <u>egyetlen</u> sorban,

AVAGY, ekvivalens módon:

A különböző prioritású csomagok M db külön sorban állnak, és az $(i+1)$-edik sorban csak akkor történik kiszolgálás, ha az első i sor üres $(i = 1, 2, \ldots, M-1)$.

Legyen $X_{i,n}$ az i-edik (vagyis pontosan i prioritású) sor hossza az n időpontban

$Y_{i,n}$ az n-edik időrésben érkező pontosan i prioritású csomagok száma.

Ekkor persze $X_{i,n+1} = (X_{i,n} - V_{i,n+1})_+ + Y_{i,n+1}$, ~~de~~

ami <u>hasonlít</u> a sorhossz-evolúciós egyenletre, $\boxed{\text{de}}$

$\boxed{\text{sajnos}}$ az i-edik sorra jutó kiszolgálási kapacitás

~~$V_{n+1} \{ 1,$ ha~~

$$V_{i,n+1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } X_{1,n} = X_{2,n} = \dots = X_{i-1,n} = 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

nem lesz független azonos eloszlású sorozat, <u>sőt</u>,

$X_{i,n}$-től sem lesz független. $\boxed{\text{Így nehéz!}}$

<u>Jobb ötlet:</u>

Legyen $S_{i,n} = X_{1,n} + X_{2,n} + \dots + X_{i,n}$ az n-kor <u>várakozó</u>,

$\boxed{\text{legfeljebb}}$ i prioritású csomagok száma.

$Z_{i,n} = Y_{1,n} + Y_{2,n} + \dots + Y_{i,n}$ az n-kor <u>érkező</u>

$\boxed{\text{legfeljebb}}$ i prioritású csomagok száma.

Erre már igaz, hogy $S_{i,n+1} = (S_{i,n} - 1)_+ + Z_{i,n+1}$

$$= S_{i,n} + Z_{i,n+1} - 1_{\{S_{i,n} \geq 1\}},$$

vagyis adott i-re $S_{i,n}$ időben homogén Markov lánc.

Ezekre az $S_{i,n}$-ekre már jók a korábbi tételek:

- $S_{i,n}$ stabil $\Longleftrightarrow \mathbb{E} Z_{i,n} < 1$

  $\Downarrow$ nyilván

  $X_{i,n}$ stabil (bármit jelentsen is ez, mert $X_{i,n}$ nem Markov)

- a stac. várható érték

$$\mathbb{E} S_i^{stac} = \frac{\mathbb{E} Z_{i,1}(1-\mathbb{E} Z_{i,1}) + Var\, Z_{i,1}}{2(1-\mathbb{E} Z_{i,1})},$$

ami számolható: ~~persze feltettük, hogy az $Y_{i,n}$-ek mind teljesen függetlenek, ezért~~

$Z_{i,n}$ definíciójából $\mathbb{E} Z_{i,1} = \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E} Y_{j,1}$

és mivel az $Y_{j,n}$-ek mind teljesen függetlenek,

$$Var\, Z_{i,1} = \sum_{j=1}^{i} Var\, Y_{j,1}.$$

- Innen, mivel $X_{i,n} = S_{i,n} - S_{i-1,n}$,

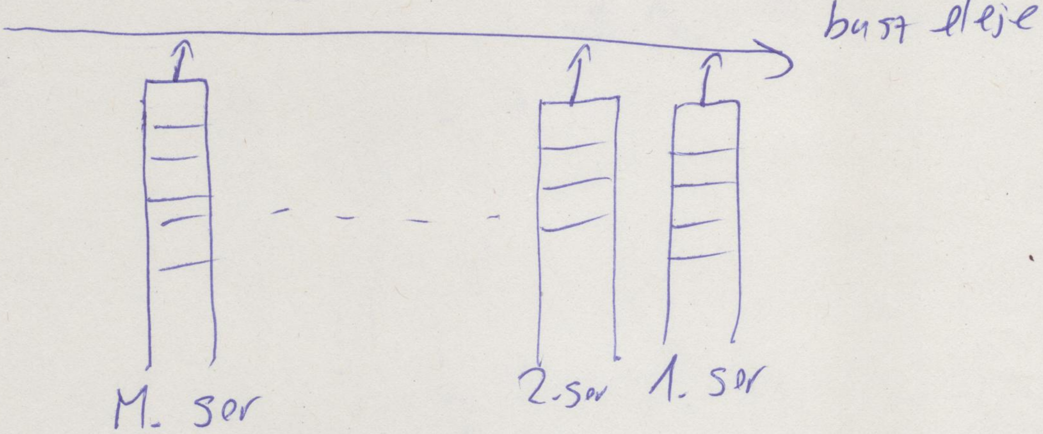
$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{E} X_i^{stac} = \mathbb{E} S_i^{stac} - \mathbb{E} S_{i-1}^{stac} \quad (i=2,3,\dots,M) \\ &\mathbb{E} X_1^{stac} = \mathbb{E} S_1^{stac} \end{aligned}}$$

- A késleltetések itt is kijönnek a Little formulából.

4 Egyirányú busz

Ez a prioritásos csomagkoncentrátor speciális esete:

- M db felhasználó mindegyike, minden időrésben, egymástól függetlenül p valószínűséggel szeretne (egyetlen) csomaget küldeni.
- A felhasználók meg vannak számozva: 1, ..., M és mindenki csak akkor küldhet, ha a nála alacsonyabb sorszámúak, akik „előrébb vannak a buszon” nem akarnak



- Ezért mindenki ~~kivive alegelsőt~~ kénytelen a maga csomagjait sorba állítani: $X_{1,n}, \ldots X_{M,n}$ a sorhosszak
- Minden időrésben pontosan 1 csomagot tudunk továbbítani (ha van).
- Vagyis az i-edik felhasználónál az n-edik résben keletkező csomagok száma $Y_{i,n} \sim B(p)$, amik teljesen függetlenek

Ekkor a prioritásos koncentrátor képletei érvényesek:

$$Z_{i,1} = Y_{1,1} + Y_{2,1} + \dots + Y_{i,1} \sim \mathrm{Bin}(i,p)$$

vagyis $$\mathbb{E}\, Z_{i,1} = i\, \mathbb{E}\, B(p) = ip$$

$$\mathrm{Var}\, Z_{i,1} = i\, \mathrm{Var}\, B(p) = ip(1-p)$$

amiből $$\mathbb{E}\, S_i^{stac} = \frac{ip(1-ip) + ip(1-p)}{2(1-ip)}$$

$$= \frac{ip}{2} + \frac{ip(1-p)}{2(1-ip)}$$

és $$\boxed{\mathbb{E}\, X_i^{stac}} = \mathbb{E}\, S_i^{stac} - \mathbb{E}\, S_{i-1}^{stac} = \dots$$

$$\boxed{= \frac{p}{2} + \frac{p(1-p)}{2} \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)}}$$

A késleltetés

$$\bar{D}_i = \frac{\mathbb{E}\, X_i^{stac}}{\mathbb{E}\, Y_{i,1}} = \frac{\mathbb{E}\, X_i^{stac}}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2} \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)}$$

$$\overset{\text{ha } p \text{ kicsi}}{\approx} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-ip)^2}$$

Legrosszabb ez $i = M$-ediknek:

$$\bar{D}_{bus} := \bar{D}_M \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-Mp)^2} \approx \frac{\bar{D}_{mux}}{1-\varrho}$$

ahol $\varrho := Mp$ a kihasználtság.

Tanulság: $\bar{D}_{bus} \approx \frac{\bar{D}_{mux}}{1-\varrho} = \frac{\bar{D}_{time}}{M(1-\varrho)}$

- Az egyszerű koncentrátor mindig a legjobb
- A busz jobb, mint az időosztás, ha M nagy (és a kihasználtság nem túl nagy).

Pl ha $\varrho = Mp = 0.9$ amiből $M = 100$ és $p = 0.009$,

akkor $M(1-\varrho) = 100 \cdot 0.1 = 10$,

vagyis $\bar{D}_{time} = 10\,\bar{D}_{bus}$

(5) Bónusz: Megszakításos csomagkoncentrátor

Egyetlen sor van, ennek hossza $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$,

V_{n+1} a kapacitás, az n-edik időrésben,

Y_{n+1} az ekkor érkező csomagok száma.

Igen ám, de $V_n = \begin{cases} K = \text{konstans, ha minden jól megy} \\ K - U_n < K\text{, ha a kapacitásból } U_n\text{-et} \end{cases}$

lefoglal valami sürgősebb (pl. élő hang átvitele). (Rossz esetben $U_n = K$.) Erről az U_n-ről nincs okunk feltenni, hogy független, azonos eloszlású sorozat lenne: ha most éppen telefonál valaki, akkor jó eséllyel $\frac{1}{10}$ másodperc múlva is telefonálni fog.

Ezért $\boxed{\text{gyengébb feltevés}}$: $V_n \in \{0, 1, \ldots, K\}$ véges állapotterű, stacionárius Markov lánc.

Tény: Ekkor X_n nem lesz Markov lánc, de

$(X_n, V_n) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, K\}$ továbbra is megszámlálható állapotterű, időben homogén Markov lánc lesz,

Jó hír 1: A Foster kritérium általánosítható erre az esetre

Jó hír 2: Itt és most nem fog szerepelni.

Végeredmény: A stabilitás feltétele továbbra is

$$\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V^{stac}$$