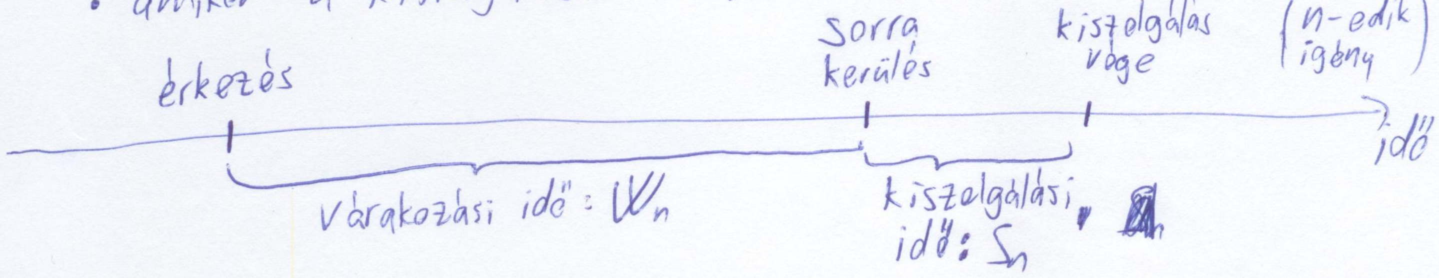
A várakozási idő evolúciója FIFO modellben

Egy kiszolgálóhoz az igények 1-esével érkeznek. Érkezésük pillanatában beállnak az 1-etlen sorba. A sorban állók kiszolgálása is 1-esével történik, <u>érkezési sorrendben</u> (FIFO = first in, first out).

Egy igény szemszögéből 3 fontos pillanat:

- amikor ő megérkezik és beáll a sorba
- amikor ő „sorra kerül", vagyis már nincs előtte a sorban senki — ekkor kezdődik az ő kiszolgálása
- amikor a kiszolgálása befejeződik:



~~érkezéskor~~

Az érkezés és a sorra kerülés között eltelt időt nevezzük <u>várakozási időnek</u>:

A sorra kerülés és a kiszolgálás vége között eltelt időt nevezzük <u>kiszolgálási időnek</u>

A rendszerben eltöltött idő a kettő összege — az igénylőt persze főleg ez érdekli.

• Ha érkezéskor a sor üres, akkor a várakozási idő nulla,

~~Amikor a kiszolgálásunk zajlik, vagyis már nincs előttünk a sorban senki~~,

• Amikor egy igény kiszolgálása zajlik, vagyis már nincs előtte a sorban senki, őt mégis beleszámoljuk a sor hosszába — a mögötte lévőknek még várni kell rá, bár ő úgy érzi, hogy már nem „sorban áll", hanem a ~~„kassza~~ „kasszánál van".

<u>Jelölés:</u> W_n az n-edik igény várakozási ideje

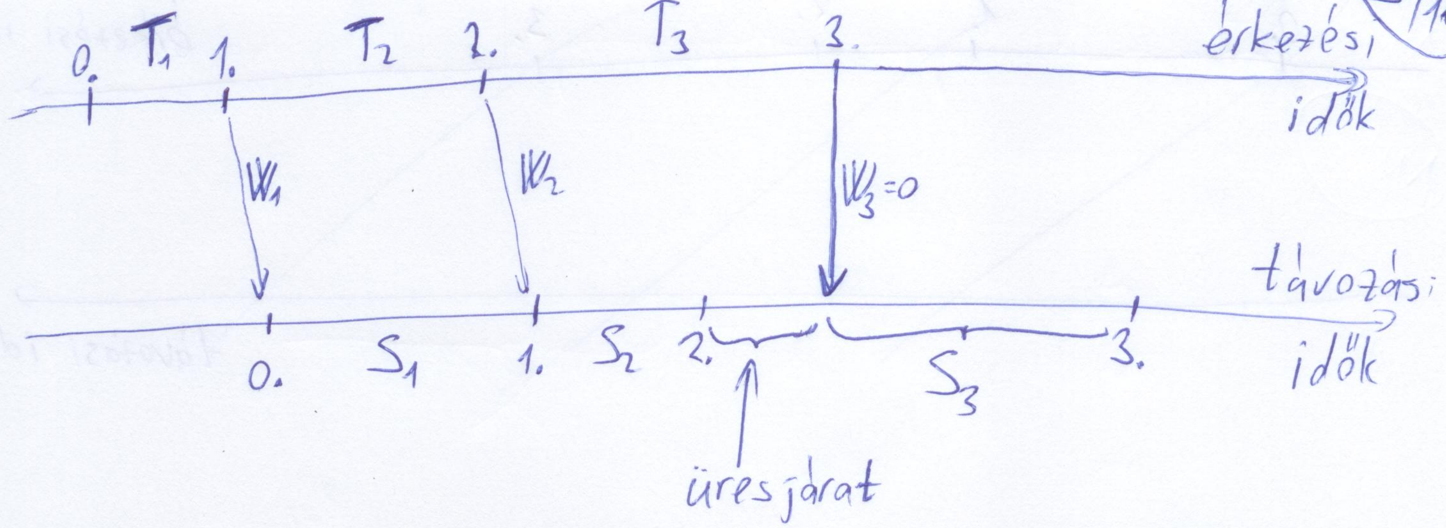
S_n —— || —— kiszolgálási ideje

T_n —— || —— érkezéséig eltelt idő, az <u>előző</u> igény érkezésé<u>től</u> számítva.

Vagyis T_n az $(n-1)$-edik és n-edik igény érkezése között eltelt idő, ha $n = 2, 3, 4, \ldots$

$n=1$-re ??: Mi az, hogy „nulladik igény"??

2 lehetőség:
- $t=0$-kor üresen indítjuk a rendszert: ekkor T_1 legyen simán az első igény érkezési ideje
- A rendszer már hosszú ideje megy, ~~de mi~~ és mi egyszer csak önkényesen elkezdjük az igényeket számozni 0-tól: ekkor van nulladik igény (sőt negatív sorszámúak is).



Megj: A modellbe belefér, hogy ha némelyik $T_n = 0$

~~vagy $S_n = 0$~~ (több igény érkezik egyszerre)

vagy $S_n = 0$ (több igény távozik egyszerre),

de ilyenkor is be kell őket számozni és a kisebb sorszámú nem érkezhet / távozhat a nagyobb sorszámú után.

Tétel (Várakozási idő evolúciós egyenlete)

$$\boxed{W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (esetleg negatív n-ekre is)

Biz: Ez egy triviatitás: legyen t_n az n-edik igény érkezési ideje,

Ekkor az $n+1$-edik igény $t_n + T_{n+1}$-kor érkezik

az n-edik $t_n + W_n + S_n$-kor távozik

annyit kell ~~sorban~~ várni, amennyivel ez nagyobb, mint ez, de legalább nullát: $W_{n+1} = \left(t_n + W_n + S_n - (t_n + T_{n+1})\right)_+$ □

[<u>Megj</u>: Ehhez az evolúciós egyenlethez igazán nem kell semmi, csak hogy $T_1, T_2, T_3, \ldots$ $S_1, S_2, S_3 \ldots \geq 0$ számok legyenek.]

<u>Következmény</u>:

Tfh $T_1, T_2, T_3, \ldots$ független, azonos eloszlású $\sim T$ valószínű-

$S_1, S_2, S_3 \ldots$ független, azonos eloszlású $\sim S$

ségi változók, amik függetlenek egymástól és W_0-tól is.

Ekkor $\boxed{W_0, W_1, W_2, W_3, \ldots \text{ időben homogén Markov lánc.}}$

<u>Megj</u>: Ha W_0, T és S <u>diszkrét</u> val. változók, pl $W_0, T, S \in \mathbb{N}$, akkor W_n is <u>diszkrét állapotterű</u> Markov lánc ~~(pl $W_n \in \mathbb{N}$~~ (pl. $W_n \in \mathbb{N}$).

Ha nem, az se baj, de mi másfajta (nem diszkrét állapotterű) Markov láncot nem is definiáltunk.

Mi továbbra is $\boxed{\text{diszkrét idejű}}$ sorbanállási modellt nézünk, amikor az érkezések és távozások is csak egész időpontokban történhetnek. Ekkor $\boxed{W_n, S_n, T_n \in \mathbb{N}.}$

Stabilitás

A ~~sorhossz~~ várakozási idő evolúcióját leíró $W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)_+$ egyenlet nagyon hasonlít a korábbi, sorhossz-evolúciót leíró $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ egyenletre.

[De vigyázat: a két egyenlet két különböző modellt ír le, pl. ~~a más~~ az X_n-ben az n idő, a W_n-ben pedig az igény sorszáma!]

Így a stabilitás feltételei is analógak:

- technikai feltételek az irreducibilitás & aperiodicitás biztosítására
- gyorsabb kiszolgálás, mint érkezés, a ∞-be való elszállás elkerülésére.

Tétel (A várakozási idő stabilitása, ~~diszkrét~~ diszkrét időben)

Legyen
$T_1, T_2, T_3 \ldots \sim T \in \mathbb{N}$ azonos eloszlásúak
$S_1, S_2, S_3, \ldots \sim S \in \mathbb{N}$ azonos eloszlásúak
$W_1 \in \mathbb{N}$ (esetleg véletlen)
} és mind teljesen függetlenek.

Tfh nincs olyan $r > 1$, hogy T és S is csak r többszöröse lehet. [Ha lenne ilyen r, akkor rosszul választottunk időegységet.] Tfh S nem azonosan nulla.

Ekkor a $W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)_+$ egyenlettel definiált Markov lánc irreducibilis és aperiodikus.

Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbb{E}S < \mathbb{E}T < \infty$.

Ekkor a W_n stabil.

Bizonyítás: Teljesen hasonló az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ sorhossz-folyamat stabilitásának bizonyításához (lásd 6. előadás). Nem ismétlem el.

Megjegyzés: Itt is igaz, hogy ha $\mathbb{E}S \geq \mathbb{E}T$, akkor W_n nem stabil.

Kapcsolat a sorhossz-evolúciós modellel

A 6. előadáson tárgyalt X_n sorhossz-modellben (ahol n a diszkrét idő) is igények érkeznek — sorban állnak — távoznak. Nincs akadálya, hogy beszámozzuk őket érkezési sorrendben, és érkezési sorrendben szolgáljuk ki őket. (Ha egyszerre több is érkezik, a számozás lehet önkényes.)

Abban a modellben minden késleltetés ≥ 1, vagyis minden igény legalább 1 időegységet eltölt a sorban, akkor is, ha érkezésekor a sor üres, és lenne kiszolgáló kapacitás.

Logikus azt mondani, hogy ha egy igény $n=10$ időben volt csak a sorban, ami előtte üres volt és utána újra üres lett (vagyis $X_9=0$, $X_{10}=1$, $X_{11}=0$), akkor az ő várakozási ideje 0, kiszolgálási ideje pedig 1, vagyis a konvenció szerint az érkezése és a távozása (kiszolgálása) között 1 időegység telt el.

A diszkrét idő használata miatt el kell döntenünk (kissé önkényesen), hogy mit tekintünk az érkezési és mit a távozási idejének.

[Emlékeztető: A 6. előadáson szereplő mesében $X_{10}=1$ a könyvelő asztalán lévő ~~kupac mérete~~ számlakupac mérete a 10. nap éjfélkor. Az az 1 számla igazából a 10. nap délutánján érkezett és a 11. nap délelőttjén távozik.]

Konvenció: A sorhossz-evolúciós modellben egy igény érkezési ideje legyen az az n, amikor ő először van benne a sorban (a fenti példában 10), távozási ideje legyen az az n, amikor ~~először~~ az érkezése után először nincs benne a sorban.

(a fenti példában 11).

Ezek után ~~egy~~ ~~$X_0, X_1, X_2 \ldots$ sorozatból tudunk $S_1, T_1, S_2, T_2, \ldots$~~

az X_0,
$V_1, V_2, V_3 \ldots$
$Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$
adatokból tudunk
W_1
$S_1, S_2, S_3 \ldots$
$T_1, T_2, T_3 \ldots$

adatokat konstruálni, és viszont (ehhez ki kell jelölni, hogy hol kezdődjön az igények számozása).

<u>Látszólag</u> tehát a két modell ekvivalens.

Ám <u>VIGYÁZAT</u>: a feltevések <u>nem</u> 100%-ban kompatibilisek:

Ha $V_1, V_2 \ldots$ f.a.eo és $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ f.a.eo,

akkor általában $S_1, S_2, S_3 \ldots$ és $T_1, T_2, T_3 \ldots$ NEM lesz az, és viszont.

<u>Pl</u>: legyen a rendszer olyan, hogy az 1 napon kiszolgált igények száma $V = 0, 1$ vagy 2 lehet.

Ha $V=2$, akkor van 2 igény, ami egyszerre távozik, vagyis közülük a másodiknak a kiszolgálási ideje <u>nulla</u>: pl. legyen $S_5 = 0$.

Fordítva is: Ha $S_5 = 0$, akkor biztosak lehetünk benne, hogy $V=2$ volt, amikor őt kiszolgálták, és ő volt

-

aznap a második.

Igen ám, de akkor azt is tudjuk, hogy aznap többet már nem szolgáltak ki, vagyis $S_6 \neq 0$.

Köv: S_5 és S_6 nem független.

Másképpen mondva:

Ha az $X_0, X_1, X_2 \ldots$ folyamat Markov lánc, akkor a $W_1, W_2, W_3 \ldots$ folyamat általában NEM Markov, és viszont.

Ezért különösen érdekes az alábbi nagyon speciális eset:

Tétel Az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ sorhossz-modellben legyen $V \in \{0,1\}$ és $Y \in \{0,1\}$, vagyis egyszerre legfeljebb 1 igény érkezhet és egyszerre legfeljebb 1 igény szolgálható ki.

[Persze továbbra is feltesszük, hogy $V_1, V_2, \ldots$ f.a.e.o. és $Y_1, Y_2, \ldots$ f.a.e.o. és teljesen függetlenek.]

Ekkor $S_1, S_2, S_3 \ldots$ ~~és $T_1, T_2, T_3 \ldots$ is~~ is f.a.e.o

$T_1, T_2 \ldots$ is f.a.e.o

és teljesen függetlenek, így W_n is Markov.

Biz: ~~A rengeteg függetlenséget nem részletezzük.~~

A feltevés miatt V és Y is Bernoulli eloszlású, legyen $V \sim B(p)$ és $Y \sim B(q)$.

Ekkor az érkezésekről (hamis) érmedobással döntünk, ahol a „fej" val. sége q, és

T_1 = ahány dobás kell az első fejhez

T_2 = — // — a második — // — az első után

⋮

T_k = — // — a k-adik fejhez a k. után

Nyilvánvalóan $T_k \sim Geom(q)$ és függetlenek.

Hasonlóan a kiszolgálási idők: hamis ~~érm~~ érmével dobálunk, ahol a fej val. sége p, és

S_k = ahány dobás kell a következő fejig a $(k-1)$-edik igény kiszolgálása után.

Nyilván $S_k \sim Geom(p)$ és mindenki mindenkitől független.

$\square$

10/11

11/11

Összegezve (Az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1}) + Y_n$, $V \sim B(p)$, $Y \sim B(q)$ sorkessz-evolúciós modell)

megfelel a

($W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)_+$, $S \sim Geom(p)$, $T \sim Geom(q)$ várakozási idő evolúciós modellnek).

A stabilitás feltétele az elsőre $EV > EY$, vagyis $p > q$

a másodikra $ET > ES$, vagyis $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$

ami persze ugyanaz, hát persze:

gyorsabb legyen a kiszolgálás, mint az érkezés.