Poisson-folyamat

avagy: a Poisson és az exponenciális eloszlás közötti meghitt jó viszonyról.

Olyan, mint diszkrét időben az érmedobás

Motiváció: Minden folytonos idejű Markov lánc erre épül.

Egy telefonos ügyfélszolgálathoz óránként átlagosan 10 hívás fut be. Legyen $X_{[t_1,t_2]}$ a $[t_1, t_2]$ idő-intervallumban befutó hívások száma. Pl $\mathbb{E}X_{[8,11]} = 3\cdot 10 = 30$, mert ez egy 3 óra hosszú időtartam.

Modell intuitíven: Nagyon sok ügyfél mindegyike, egymástól függetlenül, kicsi val. séggel hívja az ügyfélszolgálatot 8 és 11 között $\Longrightarrow$ $\underbrace{\text{jó közelítéssel}}$ $X_{[8,10]}$ Poisson eloszlású. és jobbat nem is tudunk mondani, mert pl. az ügyfelek száma ismeretlen.

A paraméter persze a várható érték: $X_{[8,11]} \sim Poi(30)$.

Ezen belül, hasonló megfontolásból

$X_{[8,\, 9{:}30]} \sim Poi(15)$

$X_{[9{:}30,\, 10]} \sim Poi(5)$

$X_{[10,11]} \sim Poi(10)$.

Kérdés: Jó jó, de mi ezeknek az $\boxed{\text{együttes}}$ eloszlása?

Válasz: Természetes lenne, hogy ezek $\boxed{\text{függetlenek}}$ legyenek:

Pl. ha [8, 9:30] között szokatlanul sok a hívás (mondjuk 40), az nem jelent semmit a [9:30, 10] intervallumra nézve: a nagyon sok ügyfélből 40-et kipipáltunk, de a maradék alig keveredik, és változatlan eséllyel hív.

[Megj: A valóság persze sokszor nem ilyen: ha kirívóan sok a hívás, az jelentheti pl. azt, hogy van valami sokakat érintő hiba, és akkor ezután is sok lesz a hívás. A mi modellünk ezt <u>nem</u> modellezi.]

A függetlenséggel konzisztens modell v.2.0:

- Nagyon sok ügyfél mindegyike
- egymástól függetlenül
- nagyon kicsi val.séggel telefonál [8, 11] között,

<u>TOVÁBBÁ</u> aki telefonál, az

- a [8, 10] intervallumon belül <u>vaktában</u> (vagyis <u>egyenletes eloszlással</u>) választja a hívás időpontját.

A függetlenség mögött lévő

<u>Tétel</u> (Poisson eloszlás színezése)

Vegyünk N db golyót, ahol $N \sim Poi(\mu)$ véletlen.
Mindegyik golyót színezzük a többitől függetlenül (és N-től is függetlenül)

- p_1 val.séggel Aranyszínűre
- p_2 val.séggel Barnára
- p_3 val.séggel Citromsárgára

⋮

- p_k val.séggel Zöldre,

ahol $p_1+p_2+\dots+p_k=1$.

Legyen X_1 az Aranyszínű, X_2 a Barna, X_3 a Citromsárgra, ⋮, X_k a Zöld -re színezett golyók száma.

Ekkor $X_i \sim Poi(p_i\mu)$ $\quad (i=1,2,\dots,k)$

és $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ teljesen függetlenek.

[Megj: Azt, hogy $X_i \sim Poi(p_i\mu)$, eddig is tudtuk – ez a Poisson eloszlás ritkítása.]

Bizonyítás: csak $k=2$-re csinálom meg.

[A többi k-ra kijön indukcióval, nem izgalmas.]

Legyen $p_1+p_2=1$, és legyen $k, l \in \{0,1,2,\dots\}$

Ekkor az $\{X_1=k, Y_1=l\}$ esemény azt jelenti, hogy összesen $(k+\ell)$ golyóval kezdünk (vagyis $N=k+\ell$), ebből k-t festettünk aranyszínűre, a maradék ℓ-et barnára.

Vagyis
$$\mathbb{P}(X_1=k, X_2=\ell) = \underbrace{e^{-\mu}\frac{\mu^{k+\ell}}{(k+\ell)!}}_{\mathbb{P}(N=k+\ell)} \underbrace{\binom{k+\ell}{k} p_1^k p_2^\ell}_{\mathbb{P}(X_1=k \mid N=k+\ell)}$$

$$= e^{-\mu(p_1+p_2)} \frac{\mu^k \mu^\ell}{(k+\ell)!} \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} p_1^k p_2^\ell$$

$$= \left[e^{-\mu p_1}\frac{(\mu p_1)^k}{k!}\right]\left[e^{-\mu p_2}\frac{(\mu p_2)^\ell}{\ell!}\right]$$

$$= \mathbb{P}(\mathrm{Poi}(p_1\mu)=k)\,\mathbb{P}(\mathrm{Poi}(p_2\mu)=\ell) \qquad (*)$$

Innen
$$\mathbb{P}(X_1=k) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_1=k, X_2=\ell) = \mathbb{P}(\mathrm{Poi}(p_1\mu)=k) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Poi}(p_2\mu)=\ell)}_{1},$$

vagyis $X_1 \sim \mathrm{Poi}(p_1\mu)$, ✓

és hasonlóan $X_2 \sim \mathrm{Poi}(p_2\mu)$ ✓

$(*)$ pedig pont azt mondja, hogy

$$\mathbb{P}(X_1=k, X_2=\ell) = \mathbb{P}(X_1=k)\,\mathbb{P}(X_2=\ell), \qquad (**)$$

ami a függetlenség. □

[<u>Megj.</u>: A Poisson eloszlás ritkításáról szóló tétel ismeretében $(*)$-ből ugorhattunk volna $(**)$-ra. Így viszont van egy] könnyű, generátorfüggvény-mentes bizonyításunk.

Ezen felbátorodva

Def: (Poisson pontfolyamat)

Legyen $H \subset [0,\infty)$ vagy $H \subset \mathbb{R}$ véletlen ponthalmaz, és $\lambda > 0$. H-t Poissen pontfolyamatnak nevezzük λ intenzitással (vagy λ rátával), ha

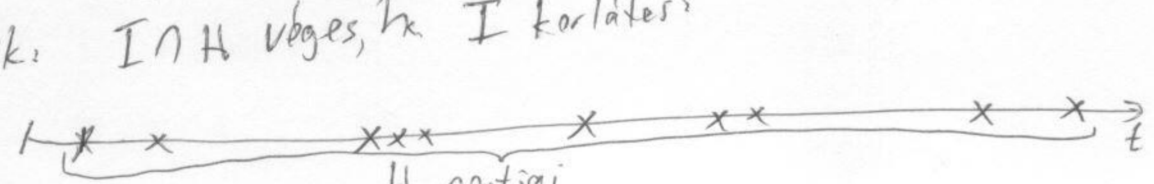
- Minden $[a,b]$ intervallumba eső pontok száma (ami persze véletlen) $\sim \mathrm{Poi}(\underbrace{\lambda(b-a)})$ ← arányos az intervallum hosszával, λ az arányossági tényező!

és

- ha $I_1, I_2, I_3 \dots I_k$ $\boxed{\text{diszjunkt}}$ intervallumok, akkor a beléjük eső pontok száma teljesen független.

Pl: Az ügyfélszolgálatra befutó hívások időpontjai (nak halmaza) jól közelíthető Poissen pontfolyamattal.

Megj: A H halmaz persze (1 val.széggel) ~~végtel~~ végtelen számosságú, viszont lokálisan véges, vagyis (1 val.széggel) minden korlátos I intervallumba csak véges sok pont esik: $I \cap H$ véges, ha I korlátos:



A véletlen ponthalmaz helyett — ekvivalens módon — nézhetjük a pontokat számoló függvényt is:

legyen $N(t)$ a t-ig beérkező hívások száma.

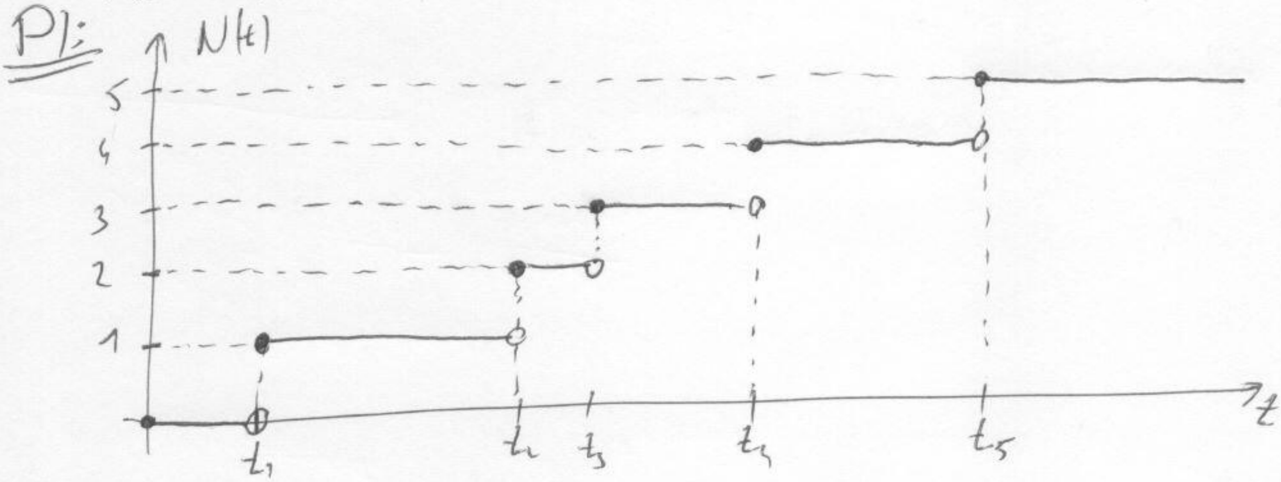
Ezt Poisson-folyamatnak nevezzük.

Def (Poisson folyamat) Ha $H \subset [0,\infty)$ Poisson pontfolyamat λ intenzitással és az $N:[0,\infty)\to\mathbb{N}$ véletlen függvényt úgy definiáljuk, hogy $N(t) = \#(H \cap [0,t])$,

számosság

akkor $N(t)$-t λ intenzitású Poisson folyamatnak nevezzük.

Pl:



ahol $H = \{t_1, t_2, t_3 \ldots\}$ a pontfolyamat.

[Megj: Ha a pontfolyamat $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$-en van, $N:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ akkor is természetesen definiálható, legfeljebb $t<0$-ra $N(t)$ hajlamos negatív lenni.]

Hasznos megjegyzés a dimenzióról:

Az ügyfélszolgálatos példánkban a folyamat rátája = intenzitása $\lambda = 10\,\frac{\text{hívás}}{\text{óra}} = 10\,\frac{\text{db}}{h} = 10\,\frac{1}{h} = \frac{10}{3600\,s} = \frac{1}{360}\,\frac{1}{s}$

vagyis dimenziója $\frac{1}{\text{idő}}$

Az $X_{[8,9]}$ (Poisson) eloszlásának paramétere:

$$\Delta t = 9h - 8h = 1h, \text{ amivel}$$

$$X_{[8,9]} \sim Poi(\lambda \cdot \Delta t), \quad \lambda \Delta t = 10\,\frac{1}{h} \cdot 1h = 10,$$

így $\lambda \Delta t$ $\boxed{\text{dimenziótlan}}$

Hát persze: Pl. $P(X_{[8,9]} = 0) = e^{-(\lambda \Delta t)}$ nem is lenne értelmes, ha $\lambda \Delta t$ nem lenne dimenziótlan: nincs olyan, hogy e^{-3s}, sem olyan, hogy $e^{-3\frac{1}{h}}$, sem olyan, hogy e^{-5kg}.

Matematikusok hajlamosak a mértékegységeket elhagyni, de ilyenkor különösen figyelni kell, hogy az időt mindig ugyanabban az egységben mérjük!

Kapcsolat az exponenciális eloszlással

1. Legyen T az ügyfélszolgálathoz befutó <u>első hívás időpontja</u>.

[Mondjuk 00:00-tól számítva].

<u>Kérdés</u>: Mi T eloszlása? (T ~~persze~~ véletlen idő.)

<u>Válasz</u>: Vegyük észre, hogy $T > 2h$

$$\Updownarrow$$

[$[0,2h]$-ben nem érkezett 1 etlen hívás sem]

$$\Updownarrow$$

$$X_{[0,2h]} = 0.$$

Vagyis $\mathbb{P}(T > 2h) = \mathbb{P}(X_{[0,2h]} = 0) \overset{X_{[0,2h]} \sim Poi(20)}{=\!=\!=} e^{-20}$

Hasonlóan $\forall\, t \geq 0$-ra

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X_{[0,t]} = 0) \overset{X_{[0,t]} \sim Poi(\lambda t)}{=\!=\!=} e^{-\lambda t}, \text{ ahol } \lambda = 10\tfrac{1}{h}$$

és persze $\mathbb{P}(T > t) = 1$, ha $t < 0$.

Vagyis T eloszlásfüggvénye

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T < t) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & , \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

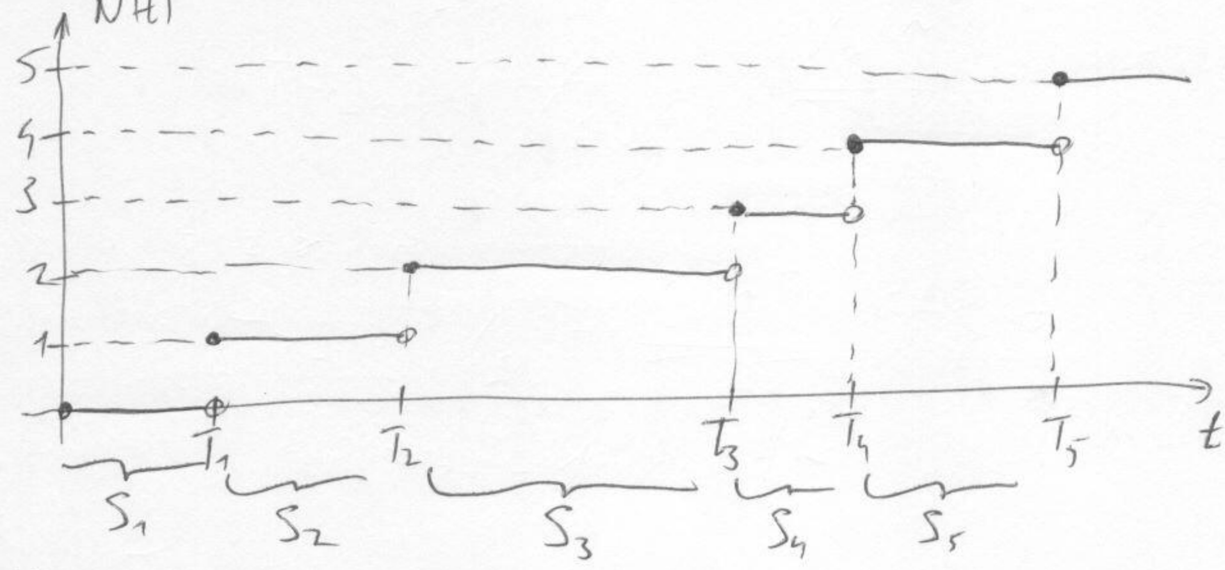
Avagy: $\boxed{T \sim Exp(\lambda)}$

Fontos: A T exponenciális eloszlásnak λ rátája ugyanaz, mint a Poisson-folyamat λ intenzitása, dimenziója továbbra is $\frac{1}{\text{idő}}$.

(2) Jó, akkor legyen most T_2 a második befutó hívás időpontja.

Nyilván $T_2 \geq T_1$, ezért legyen $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2 - T_1$, hasonlóan T_k a k-adik befutó hívás időpontja,

$S_k := T_k - T_{k-1}$ az előző hívástól a k-adikig eltelt idő:



Kérdés: Hát $S_2, S_3, \ldots$ -nek mi az eloszlása?

Tétel: Ha $\{T_1, T_2, T_3 \ldots\}$ λ intenzitású pontfolyamat $[0,\infty)$-en, $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \ldots$, $S_1 = T_1$ és $S_k = T_k - T_{k-1}$ $(k \geq 1)$, akkor $S_1, S_2, S_3 \ldots \sim Exp(\lambda)$ és TELJESEN FÜGGETLENEK!!

Biz: Nem írom le, de hihető, hogy ha tudjuk, hogy $T_5 = 0.42$, akkor mindegy, hogy mi történt előtte, a 6-odik hívásra onnantól kezdve kell $\sim Exp(\lambda)$ időt várni.

10/20

$\boxed{\text{LÉNYEG}}$: Az előbbi állítás megfordítása is igaz, és a Poisson-folyamat egy alternatív konstrukcióját / ekvivalens alternatív definícióját adja:

Tétel (lehetne definíció is):

Legyen $S_1, S_2, S_3 \ldots \sim Exp(\lambda)$ független sorozat.

Legyen $T_k = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$, $(k = 1, 2, \ldots)$

$$N(t) = \max\{k \mid T_k \le t\} \qquad (t \ge 0\text{-ra})$$

[Vagyis egy $\boxed{\text{exponenciális óra}}$ véletlen, ~~ex~~ $\sim Exp(\lambda)$ időközönként csörög, az előzményektől függetlenül, és ilyenkor 1-et lép előre a mutató. T_k legyen a k-adik csörgés időpontja, $N(t)$ legyen a csörgések száma t-ig, avagy a mutató állása t-kor.]

Ekkor $\{T_1, T_2, T_3 \ldots\}$ Poisson pontfolyamat $[0,\infty)$-en λ intenzitással,

illetve $N(t)$ Poisson-folyamat $[0,\infty)$-en λ intenzitással.

Biz: (vázlat, csak érdeklődőknek):

Nézzük $N(t)$ eloszlását! (Annak kell kijönni, hogy $N(t) \sim Poi(\lambda t)$)

Elsőkörben $N(t)$ és T_k között tudunk kapcsolatot teremteni:

$\{N(t) < k\} \iff$ t ideig k-nál kevesebb csörgés történt $\iff$

$\iff$ a k-adik csörgés a t időpont után történt $\iff \{T_k > t\}$

vagyis $\mathbb{P}(N(t) < k) = \mathbb{P}(T_k > t)$. minden k-ra,

Ha ezt kiszámoljuk, meglesz $N(t)$ eloszlása, hiszen

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(N(t) < k+1) - \mathbb{P}(N(t) < k).$$

T_k eloszlását ismerjük: $T_k = S_1 + \ldots + S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$

<u>Gamma-eloszlás</u> sűrűségfüggvénye

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} & \text{, ha } x > 0 \\ 0 & \text{, ha nem.} \end{cases}$$

A $\mathbb{P}(T_k > t)$ val.szeg kiszámolásához ezt kéne integrálni:

$$\mathbb{P}(T_k > t) = \int_t^\infty f_k(x)\,dx = \int_t^\infty \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}\,dx.$$

Ez elég ijesztően néz ki: egy parciális integrálás után

$$\mathbb{P}(T_k > t) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} \int_t^\infty \underbrace{\frac{x^{k-1}}{k-1}}_{u(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'(x)}\,dx = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} \left\{ \left[\underbrace{\frac{x^{k-1}}{k-1}}_{u(x)} \underbrace{(-e^{-\lambda x})}_{v(x)} \right]_t^\infty - \int_t^\infty \underbrace{x^{k-2}}_{u'(x)} \underbrace{(-e^{-\lambda x})}_{v(x)}\,dx \right.$$

$$= \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}\left\{\left[\frac{t^{k-1}}{k-1}e^{-\lambda t}-0\right]+\int_t^\infty x^{k-2}e^{-\lambda x}dx = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}+\int_t^\infty \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}x^{k-2}e^{-\lambda x}dx\right.$$

Egy kicsit előrébb vagyunk, az integrandusban az $e^{-\lambda x}$ mellett az x kitevője már nem $(k-1)$ csak $(k-2)$...

Még $(k-2)$-ször kell eljátszani a parciális integrálást, és λ is fogy...

<u>SZERENCSÉRE</u> egy kis szemfülességgel ez megspórolható:

$a_k := \mathbb{P}(T_k > t)$ jelöléssel pont azt kaptuk, hogy

$$a_k = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t} + a_{k-1} \quad \text{, vagy átindexeléssel}$$

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} + a_k}$$

De hát <u>HURRÁ</u>,

$$\boxed{\mathbb{P}(N(t)=k)} = \mathbb{P}(N(t)<k+1) - \mathbb{P}(N(t)<k)$$

$$= \mathbb{P}(T_{k+1}>t) - \mathbb{P}(T_k>t)$$

$$= a_{k+1} - a_k = \boxed{\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad \text{minden } k\text{-ra}}$$

$\Rightarrow \boxed{N(t) \sim Poi(\lambda t)}$.

A Poi-folyamat többi tulajdonsága:

- egy tetszőleges intervallumba eső pontok száma
- diszjunkt intervallumok függetlensége

kijön az exponenciális eloszlás $\boxed{\text{örökifjú}}$ságából.

Mit jelent a Poisson-folyamat rátája
= Exp. eloszlás rátája?

O. válasz: Hosszú távon ennyi lesz az időegységre eső csörgések száma: „óránként átlag 10 hívás".

Jobb válasz: Az időegységre eső hívások száma ugyan ingadozik, de a várható értéke mindig λ lesz, nem csak hosszú távon.

$\boxed{\text{Sőt!!:}}$ Rövid távon λ lényegében a csörgés val.-ségét adja meg.

Pontosabban: Legyen Δt rövid idő, pl. az ügyfélszolgálaton $\Delta t = 1s$. Hány hívás fut be ezen Δt alatt?

$X_{[0,\Delta t]} \sim Poi(\lambda \Delta t)$ és $\lambda \Delta t = \frac{1}{360}$ kicsi, ezért

- $\mathbb{P}(X_{[0,\Delta t]} = 0) = e^{-\lambda \Delta t} \approx 1$: legvalószínűbb, hogy nem történik semmi.
- $\mathbb{P}(X_{[0,\Delta t]} = 1) = e^{-\lambda \Delta t} \lambda \Delta t \approx \lambda \Delta t$: kicsi val-séggel befut egy hívás
- $\mathbb{P}(X_{[0,\Delta t]} = 2) = e^{-\lambda \Delta t} \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} \approx \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2}$ még sokkal kisebb,
- $\mathbb{P}(X_{[0,\Delta t]} = k) \sim \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!}$ -ról nem is beszélve.

Avagy: RÖVID Δt idő alatt

- $\mathbb{P}$(történik valami) $\approx \mathbb{P}$(pontosan 1 csörgés)
- Ez a val.-ség arányos Δt-vel

[Hát persze, 2 mp alatt kb 2-szeres eséllyel csörög a telefon]

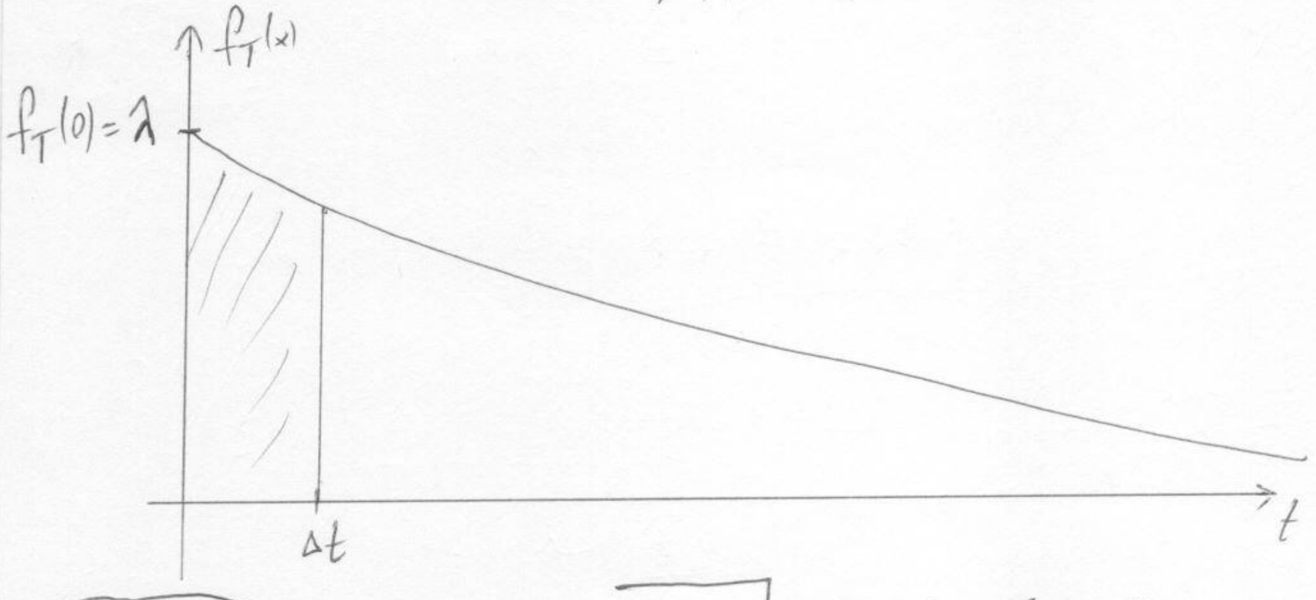
- Az $\boxed{\text{arányossági tényező}}$ éppen λ.

Ugyanez az exponenciális eloszlás nyelvén:

Legyen $T_1 \sim Exp(\lambda)$ az exponenciális óra első csörgési ideje., és Δt kicsi.

Ekkor $\mathbb{P}(\Delta t \text{ időn belül csörög}) = \mathbb{P}(0 \leq T < \Delta t) = \int_0^{\Delta t} f_T(x)\,dx$

ahol $f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{, ha } x > 0 \\ 0 & \text{, ha nem} \end{cases}$ a T sűrűségfüggvénye



$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(0 \leq T < \Delta t)} \approx f_T(0)\,\Delta t = \boxed{\lambda \Delta t}$, mert $[0, \Delta t]$-n $f_T \simeq const = \lambda$.

15/20

[Avagy: az $f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$ képletben

ez a λ, ami eddig ártalmatlan normáló tényezőnek tűnt, most fontos szerephez jutott, mint $x=0$-beli függvényérték]

Poisson-folyamatok összege/egyesítése

Eddig a Töki Kft. piripócsi irodájáról volt szó.

Igen ám, de Nekeresden is van egy ügyfélszolgálat, oda is Poisson folyamat szerint jönnek a hívások, $\lambda_2 = 15\,\frac{1}{h}$ rátával.

Mi lesz, ha összevonják a két ügyfélszolgálatot: Hogyan érkeznek majd a hívások?

Intuitíve nyilvánvaló: Továbbra is Poisson folyamat szerint,

hiszen
- sok ügyfél
- egymástól függetlenül
- kis valséggel

telefonál, csak

ezúttal az egyesített intenzitás $\lambda + \lambda_2 =$

$= 10\,\frac{1}{h} + 15\,\frac{1}{h} = 25\,\frac{1}{h}$ lesz.

Ugyanez matematikailag:

<u>Tétel</u> (független Poisson val.változók összege)
Ha $X_1 \sim Pei(\mu_1)$ és $X_2 \sim Pei(\mu_2)$ független,
akkor $X_1 + X_2 \sim Pei(\mu_1 + \mu_2)$.

<u>Biz:</u> könnyű, def. útján vagy generátorfüggvény-módszerrel.

<u>Tétel</u> (független Poisson folyamatok összege)
a.) Ha H_1 és $H_2 \subset [0,\infty)$ (vagy $(-\infty,\infty)$) Poisson pontfolyamatok λ_1 illetve λ_2 intenzitással, amik <u>függetlenek</u>, akkor
$H_1 \cup H_2$ is Poisson pontfolyamat $\lambda_1 + \lambda_2$ intenzitással.

b.) Ha $N_1(t)$ és $N_2(t)$ <u>független</u> Poisson-folyamatok λ_1 ill. λ_2 intenzitással, akkor $N_1(t) + N_2(t)$ is Poisson folyamat $\lambda_1 + \lambda_2$ intenzitással.

<u>Biz:</u> Az előzőből nyilvánvaló.

<u>Megj:</u> Persze ugyanígy megy K db független Poi-folyamat egyesítése / összeadása, ahol $K \in \mathbb{N}$.

Poisson-folyamat színezése / ritkítása

A piripócsi ügyfélszolgálaton 3 ügyintéző ül.
Minden bejövő hívásnál elgurítanak egy dobókockát, és

- Ha 1-es jön ki, akkor Aladár veszi fel
- ha 2-es vagy 3-as, akkor Béla
- ha 4-es, 5-ös vagy 6-os, akkor Cili.

Legyen $N_A(t)$ az Aladár által t-ig felvett hívások száma

$N_B(t)$ a Béla —— // ——

$N_C(t)$ a Cili —— // ——

[Persze $N_A(t)+N_B(t)+N_C(t)=N(t)$, amiről feltettük, hogy Poisson folyamat λ intenzitással.]

Tétel (Poi-folyamat színezése)

$N_A(t)$, $N_B(t)$ és $N_C(t)$ $\boxed{\text{független}}$ Poisson folyamatok, $\lambda_A=p_A\lambda$, $\lambda_B=p_B\lambda$ ill. $\lambda_C=p_C\lambda$ intenzitással, ahol (esetünkben) $\lambda_A=\frac{1}{6}$, $\lambda_B=\frac{2}{6}$, $\lambda_C=\frac{3}{6}$.

[Bocs, hogy nem mondom ki a tételt általánosan és matematikailag formalizálva.]

Biz: A Poi-eloszlás színezésére vonatkozó tételből nyilvánvaló.

Megj: Ha csak $N_A(t)$-t nézzük, és a másik kettőt nem, akkor ez a Poisson-folyamat ritkítása.

Poisson-folyamatok egyesítése ill. ritkítása az exponenciális eloszlás nyelvén

Egyesítés: Összevonják a piripócsi és nekeresdi ügyfélszolgálatot. Mi lesz az egyesített ügyfélszolgálatra befutó első hívás időpontjának eloszlása?

[Külön-külön $Exp(10\frac{1}{h})$ illetve $Exp(15\frac{1}{h})$ volt, és független.]

Tétel (Független exponenciális ~~vál~~ val. változók minimuma)

Ha $S^{(1)} \sim Exp(\lambda_1)$ és $S^{(2)} \sim Exp(\lambda_2)$ függetlenek és $S = \min\{S^{(1)}, S^{(2)}\}$, akkor $S \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Biz: Azonnal következik a Poi-folyamatok egyesítésére vonatkozó tételből, de direkt úton is könnyű: $t > 0$-ra

$$\mathbb{P}(S > t) = \mathbb{P}(S^{(1)} > t \text{ és } S^{(2)} > t) \xrightarrow{\text{függetlenség}} \mathbb{P}(S^{(1)} > t)\mathbb{P}(S^{(2)} > t)$$

Emlékeztető: az eloszlásfüggvény $F_{Exp(\lambda)}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S^{(1)} > t) = e^{-\lambda_1 t}$$
$$\mathbb{P}(S^{(2)} > t) = e^{-\lambda_2 t}$$

amiből $\mathbb{P}(S>t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

$\Rightarrow$ S eloszlásfüggvénye

$$F_S(t) = 1 - \mathbb{P}(S>t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, & \text{ha } t>0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $S \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$ $\square$

<u>Megj:</u> Ugyanígy, ha $S^{(i)} \sim Exp(\lambda_i)$ függetlenek $i=1,\dots,k$, akkor $\min\{S^{(1)},\dots,S^{(k)}\} \sim Exp(\lambda_1+\dots+\lambda_k)$.

Ritkítás:

Nézzük most csak Piripócson, csak az Aladár által felvett hívásokat. Mikor lesz az első ilyen?

Válasz: Addig kell várnia egymás után a hívásokat, amíg nem sikerül végre 1-est dobni a kockával. Vagyis $\sim Geom(p=\frac{1}{6})$ darab hívást kell kivárnia.

<u>Tétel</u> (Exponenciális eloszlás ritkítása)

Legyen $\left.\begin{array}{l} S_1, S_2, S_3 \dots \sim Exp(\lambda) \\ N \sim Geom(p) \end{array}\right\}$ teljesen függetlenek,

és legyen $S = \sum_{i=1}^{N} S_i$.

Ekkor $S \sim Exp(p\lambda)$.

Biz: Azonnal következik a Poi-folyamat ritkítására vonatkozó ~~tétel~~ tételből.

20/20

Megj: $S = \sum_{i=1}^{N} S_i$ nagyon hasonlít a generátorfv-módszernél tárgyalt „véletlen tagszámú összeg"-re, de S_i nem egész értékű, így nincs neki generátorfv-e, és a bizonyítás sem megy csupán a generátorfv-módszerrel.

Ezért lesz jó dolog (többek között) a ~~Laplace transz~~ Laplace-transzformáció.

Megj. 2: $\exists$ éé... ~~Geom(p) darab~~ $\sim$ Geom(p) darab független $\sim$ Geom(q) val. változó összege is $\sim$ Geom(pq) vdt. A hasonlóság nem véletlen.