# Folytonos idejű Markov láncok

továbbra is <u>diszkrét</u> állapottéren: $S$ véges $\vee$ megszámlálhatóan $\infty$

$X(t)$ folytonos idejű sztochasztikus folyamat. $X: \mathbb{R}^+ \to S$

véletlen fv, avagy: $\forall t \in [0,\infty)$-re $X(t) \in S$ véletlen.

<u>Pl</u>: Egy üzletember a világ 6 szállodája között utazgat.

[Ezeket számozzuk be: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X(t)$ legyen az, hogy $t$-kor melyik szállodában van. $\in S$

[Az utazási időket elhanyagoljuk: emberünk időnként pillanatszerűen átutazik egyik szállodából a másikba]

<u>Def</u>: $X(t)$ Markov lánc (folytonos időben), ha

$\forall$ $\underbrace{t_1 < t_2 < t_3 < \ldots t_{n-1}}_{\text{múlt}} < \underbrace{t_n}_{\text{jelen}} < \underbrace{s}_{\text{jövő}}$ időpontokra ($n$ véges!)

és $\forall$ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y \in S$ állapotokra

$$\mathbb{P}(\underbrace{X(s)=y}_{\substack{\text{jövőbeli}\\ \text{állapot}}} | \underbrace{X(t_1)=x_1, \ldots,}_{\substack{\text{infó a}\\ \text{múltról}}} \underbrace{X(t_n)=x_n}_{\substack{\text{jelen}\\ \text{állapot}}}) = \mathbb{P}(\underbrace{X(s)=y}_{\substack{\text{jövőbeli}\\ \text{állapot}}} | \underbrace{X(t_n)=x_n}_{\substack{\text{jelen}\\ \text{állapot}}})$$

pont mint diszkrét időben: Ha a jelen állapotot ismerjük, a múlt ismerete már nem jelent többlet-információt a jövőre ~~vo~~ vonatkozóan.

Jelölés: $t < s \in \mathbb{R}^+$, ~~$x,y \in S$-re~~ $x,y \in S$-re

$$P_{xy}^{(t,s)} := \mathbb{P}(X(s)=y \mid X(t)=x)$$

az átmenetvalószínűség $x$-ből $y$-ba a $[t,s]$ intervallumban.

Def: Az $X(t)$ Markov lánc időben homogén, ha $P_{xy}^{(t,s)}$ ~~csak~~ nem függ $(t,s)$-től külön-külön, csak az eltelt időtől, $s-t$-től.

~~Ig. lyp~~ Mi csak ilyenekkel foglalkozunk.

Ilyenkor jelölés: $P_{xy}(t) := \mathbb{P}(X(t)=y \mid X(0)=x)$

$$= \mathbb{P}(X(t_0+t)=y \mid X(t_0)=x) \quad \forall\, t_0\text{-ra}$$

a $t$ idejű átmenetvalószínűség

Avagy: $\left(P_{xy}(t)\right)_{x,y\in S}$ a $t$ idejű átmenetmátrix,

pont mint diszkrét időben, csak most $t \in \mathbb{R}^+$.

Ha $S=\{1,2,\dots,k\}$, akkor ez egy $K\times K$-as mátrix.

Tétel: $\forall\, t,s \geq 0$-ra

$$P(t+s) = P(t)\,P(s)$$

Biz.: Szóról szóra mint diszkrét időben. $\square$

Persze: $P(0) = \mathbb{1}$ egységmátrix.

Köv.: $P(n\Delta t) = [P(\Delta t)]^n$, vagyis ha $P(\Delta t)$-t ismernénk valamilyen rövid $\Delta t$-re, akkor annak minden többszörösére is tudnánk az átmenet-valószínűségeket, ami elég jó.

Avagy: Ha csak $\Delta t$ időközönként nézünk rá:

$$Y(n) := X(n\Delta t)$$ diszkrét idejű Markov lánc $P(\Delta t)$ átmenetmátrixszal.

Mi <u>nem</u> így fogjuk ~~megközelíteni~~ megközelíteni.

Kérdés: 1.) ~~Ho~~ Hogy kell egy ilyen folyamatot elképzelni / konstruálni?

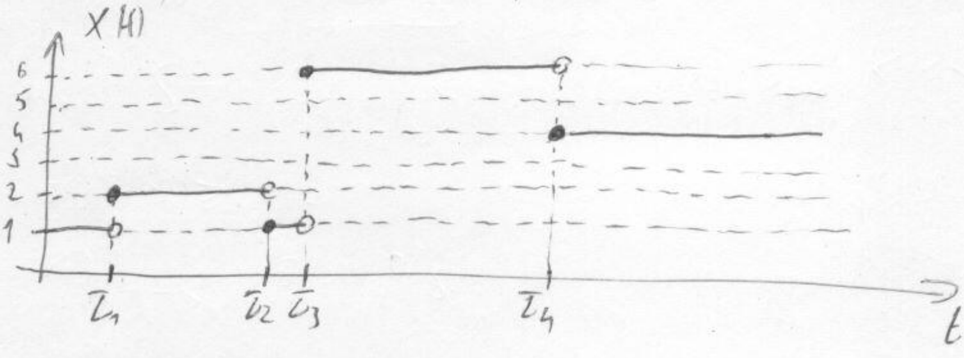
2.) Hogy lehet $P(t)$-t kiszámolni?

3.) Mi a hosszú távú viselkedés?

---

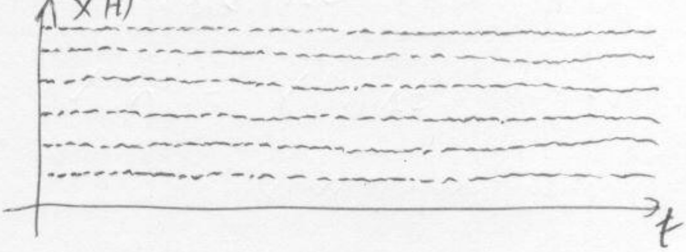
## Konstrukció / jellemzés

Hihető: elemi regularitási feltételek mellett (pl. szakaszonkénti folytonosság) $X(t)$ <u>ugró folyamat</u>:




$\exists\ \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n \to \infty$ véletlen időpont-sorozat (avagy: $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n, \dots\}$ véletlen lokálisan véges halmaz) amikor $X(t)$ ugrik, egyébként $(\tau_i, \tau_{i+1})$-eken konstans.

Megj.: A definícióba beleférne pl., hogy az $X(t)$-k (kontinuum sokan) teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak. Ekkor a nagy számok törvénye miatt $X(t)$ 1 valószínűséggel minden időintervallumban minden értéket végtelen sokszor felvesz:




Az üzletember mozgása nem ilyen.

Nekünk viszont nem fér bele: csak ugró folyamatokat nézünk.

- Tfh üzletemberünk éppen a 3-as szállodában van, 1 órája érkezett. $\mathbb{P}$(1 órán belül továbbáll) = ?
- És ha már egy éve ott van, akkor ugyanez = ?

Észrevétel: Ha a folyamat Markov, akkor mindegy, hogy mennyi ideje van ott: csak az számít, hogy most éppen ott van

$\Rightarrow$ a tartózkodási idő örökifjú $\Rightarrow$ exponenciális eloszlású.

Avagy: emberünk a 3-as szállodába érkezve elindít egy $\lambda_3$ paraméterű exponenciális órát, és amikor az csörög, akkor továbbáll. $\rightarrow$ A paraméter függhet attól, hogy hol van

$\rightarrow$ de amúgy a tartózkodási idő független a múlttól.

OK, épp most csörgött az óra, menni kell a 3-as szállodából, pedig még csak 1 órája érkezett.

~~$\mathbb{P}$(… …) = ?~~

- $\mathbb{P}$(a 4-esbe megy) = ?
- És ha már egy évet itt töltött, akkor ugyanez = ?

} Észrevétel:

Ismét ~~csak~~ nem számít a múlt, ha a folyamat Markov.

Hanem: Amint az óra csörög, emberünk ~~elgurít egy hamis dobókockát~~ elgurítja a 3-as számú hamis dobókockáját, és azzal dönt a továbbutazásról: az egyes vdsgek

$$Q_{3i} := \{ i\text{-be ugrik} \mid 3\text{-ban van} \} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

A kocka persze olyan, hogy $Q_{33} = 0$ : helyben ugrani nem lehet.

Összefoglalva

Ugró Markov folyamat, 1. konstrukció: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ állapottéren

- Emberünk 6 db exponenciális órát cipel a zsebében $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ paraméterrel. Az $i$ állapotba ($i$-edik szállodába) érve elindítja az $i$-edik óráját, ami az előzményektől független $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$ idő után csörög. Amikor csörög, emberünk továbbáll.
- Emberünknek 6 db hamis dobókocka is van a zsebében. Amikor $i$-ből menni kell, az $i$-edik kockával sorsolja ki a következő állapotot, az előzményektől függetlenül,

$$Q_{ij} := \mathbb{P}(j\text{-be ugrik} \mid i\text{-ben van}).$$

~~$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$ neve tartózkodási idő paraméter vektor~~ ~~$Q := \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{61} & \cdots & Q_{66} \end{pmatrix}$ a beágyazott diszkrét~~

Ekkor $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$ neve tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} Q_{11}, & \ldots, & Q_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{61} & \ldots & Q_{66} \end{pmatrix}$$

~~a~~ beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa.

A főátló elemei nullák: $Q_{ii} = 0$

Ugyanez másképp:

- A szállodák ~~kész~~ portásánál van 1-1 exponenciális óra, így az utazónak ezeket nem kell cipelni: amikor csörög, a portás szól, hogy ~~menni~~ indulni kell.

  Észrevétel: A portásnak nem kell figyelni, hogy mikor érkezik a vendég (és akkor indítania az órát). ~~Ekkor, ha~~ Az örökifjúság miatt az is jó, ha előre elindítja — de ha csörög, mindig újra ~~ke~~kell indítani.

  Avagy: Az i-edik szállodában ~~van~~ ül egy $\lambda_i$ intenzitású Poisson-folyamat, amik függetlenek ~~a~~ egymástól. Ha az i-edik ~~folyam~~ Poi-folyamat csörög és az emberünk éppen ott van, akkor továbbáll.

- A portásoknál van 1-1 hamis dobókocka is, hogy az utazónak ezt se kelljen cipelni. Amikor az órájuk csörög, rögtön dobnak a kockával, és rendelnek egy helikoptert, ami a megfelelő cél-szállodába repül. Ha emberünk éppen ott van, fel száll.

[Így a 6 stálloda között $6 \cdot 5 = 30$ vonalon járnak a helikopterek, minden $i \to j$ irányított élen, ahol $i \neq j$]

**Kulcs-észrevétel**

- A $3 \to 4$ vonalon járó helikopterek maguk is Poisson-folyamat szerint járnak — lásd: Poisson-folyamat ritkítása
- Sőt: Az egyes vonalakon (= irányított éleken) lévő helikopterjáratok teljesen független Poi-folyamatok szerint járnak — lásd: **Poisson-folyamat színezése.**

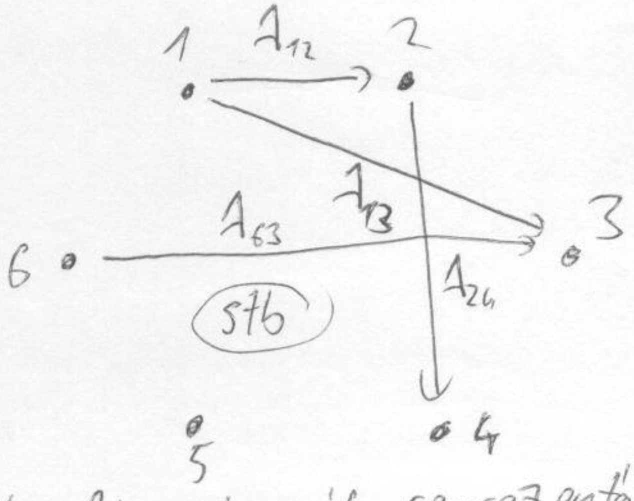
Az $i \to j$ vonalon az intenzitás $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$.

**Összefoglalva:**

**Ugró Markov folyamat, 2. konstrukció:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ állapottéren

A 6 stálloda alkossa egy ~~gráf~~ irányított gráf 6 csúcsát. Az egyes $i \to j$ irányított éleken (ahol $i \neq j$) független Poisson-folyamatok szerint járnak a helikopterek. Ha emberünk éppen ott van egy helikopter indulásánál, felszáll rá.

~~[Kiegészítés~~




Hurokél nincs (helyben repülés nincs).

Ábra: ugró Markov folyamat gráf-reprezentációja

[Megjegyzés (off topic, csak az érdekesség kedvéért):
Ha több üzletember is ugyanezt a szabályt követve utazgat, akkor ~~az ü~~ a sorsuk külön-külön folytonos idejű Markov lánc, de távolról sem független: sőt, ha egyszer összetalálkoznak, utána örökre együtt maradnak — előbb-utóbb az összes összeragad (ha mindenhonnan mindenhova el lehet jutni).
A jelenség neve csatolás (avagy: ez egy lehetséges csatolási konstrukció Markov láncokra. = „coupling")]

A $\underline{\underline{\lambda}} = (\lambda_{ij})_{i,j \in S}$ „mátrix" neve ráta-mátrix:

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{16} \\ \lambda_{21} & * & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{26} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_{51} & \cdots & \lambda_{54} & * & \lambda_{56} \\ \lambda_{61} & \cdots & & \lambda_{65} & * \end{pmatrix}$$

Ez nem egy igazi mátrix, mert a főátlóban nincs semmi.

Áttérési szabály a 2 konstrukció között

1. konstrukció

Adatok: $\underline{\lambda}$, $\underline{Q}$

Áttérés: $\lambda_i = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \lambda_{ij}$

$$Q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$$

2. konstrukció

$\underline{\lambda}$

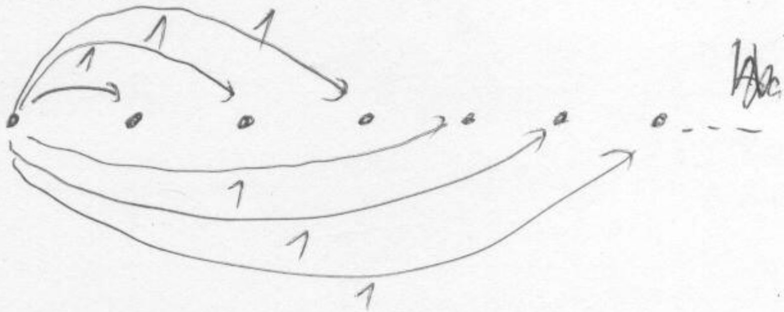
$\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij} \quad \forall i,j \in S, \ i \neq j$

<u>Megj:</u> Minden folytonos idejű, időben homogén Markov ugró folyamathoz van $\underline{\lambda}$, $\underline{\underline{Q}}$, $\underline{\underline{\lambda}}$ — vagyis a folyamat megkonstruálható ezekből — ez a fenti érvelésből látszik.

<u>Fordítva:</u> Ha $S$ <u>véges</u>, akkor $\forall$ $(\underline{\lambda}, \underline{\underline{Q}})$ párból, vagy $\forall$ $\underline{\underline{\lambda}}$ adatból konstruálható Markov lánc.

Ha viszont $S$ végtelen, akkor lehetnek gondok. Pl:

<u>Pl/1:</u>




$S = \mathbb{N}$

$\lambda_{0i} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots$

Ekkor $\lambda_0 = \infty$: azonnal el kellene ugrani, mindenhová azonos val.séggel — ilyen folyamat nincs.

<u>Pl/2:</u>

$$\bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{2} \bullet \xrightarrow{4} \bullet \xrightarrow{8} \bullet \xrightarrow{16} \bullet \xrightarrow{32} \bullet \xrightarrow{64} \bullet \ldots$$

$S = \mathbb{N}$, $\lambda_{i,i+1} = 2^i$

a többi $\lambda_i = 0$

Ekkor $T_i :=$ az ugrás ideje $i \to i+1$

$$T_i \sim Exp(2^i) \Rightarrow \mathbb{E}\, T_i = \frac{1}{2^i}$$

$U := T_0 + T_1 + T_2 + \ldots$ az az idő, ami alatt $\infty$-be eljut

$$\mathbb{E} U = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} T_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2 < \infty$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(U < \infty) = 1$: biztosan lesz véges idő alatt végtelen sok ugrás, tehát nagy $t$-re $X(t)$ értelmetlen: ilyen folyamat sincs $t \in [0, \infty)$-re.

## Időfejlődés

Hogyan lehet a $(\underline{\lambda}, \underline{\underline{Q}})$ vagy $\underline{\underline{\lambda}}$ adatokból a $P_{ij}(t)$ átmenet-valószínűségeket meghatározni?

Ötlet: legyen $\Delta t$ rövid idő

Ekkor $\Delta t$ idő alatt, $i$ állapotból indulva

$\mathbb{P}(\text{nem történik semmi}) \approx 1$ : ez a legvalószínűbb

$\mathbb{P}(1 \text{ ugrás történik}) \approx \lambda_i \Delta t$ kicsi

mert a tartózkodási idő $\sim Exp(\lambda_i)$

$\mathbb{P}(\text{több ugrás történik}) \sim (\Delta t)^2$ végképp elhanyagolható

$\to$ ezen belül $\mathbb{P}(1 \text{ ugrás } i\text{-ből } j\text{-be}) \approx \lambda_{ij} \Delta t$ : ekkora val-séggel csörög a $\lambda_{ij}$ rátájú Poi-folyamat.

Köv: $$P_{ij}(\Delta t) = \mathbb{P}(X(\Delta t) = j \mid X(0) = i) \approx \begin{cases} 1 - \lambda_i \Delta t, & \text{ha } j = i \\ \lambda_{ij} \Delta t, & \text{ha } j \neq i \end{cases} \qquad (*)$$

ahol a $\approx$ azt jelenti, hogy a hiba $\Delta t$-hez képest elhanyagolható.

Mivel $$P_{ij}(0) = \mathbb{1}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = i \\ 0, & \text{ha } j \neq i, \end{cases}$$

$(*)$ úgy is írható, hogy

$$P_{ij}(\Delta t) \approx P_{ij}(0) + \Delta t\, G_{ij}, \text{ ahol } G_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & \text{ha } j = i \\ \lambda_{ij}, & \text{ha } j \neq i \end{cases} \qquad (**)$$

Precízen mondva:

**Tétel:** $\dot{P}_{ij}(0) = \frac{d}{dt} P_{ij}(t)\Big|_{t=0} = G_{ij}$, ahol $G_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & \text{ha } j=i \\ \lambda_{ij}, & \text{ha } j \neq i \end{cases}$

**Def:** a $G = (G_{ij})_{i,j \in S}$ mátrix neve $\boxed{\text{infinitezimális generátor}}$

Úgy születik a $\underline{\Lambda}$ ráta-mátrixból, hogy kitöltjük a főátlót negatív számokkal, hogy minden sorösszeg 0 legyen.

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{15} & \lambda_{16} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{25} & \lambda_{26} \\ \vdots & & & & & \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} & \cdots & \lambda_{54} & -\lambda_5 & \lambda_{56} \\ \lambda_{61} & \lambda_{62} & \cdots & \cdots & \lambda_{65} & -\lambda_6 \end{pmatrix}$$

Ez az igazán fontos objektum, az elmélet alap építőköve.

Bz: $\dot{P}_{ij}(0) = \frac{d}{dt} P_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t) - P_{ij}(0)}{\Delta t} \overset{(**)}{=}$ $\cancel{G_{ij} + \text{hibatag}}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left( G_{ij} + \frac{\text{hibatag}}{\Delta t} \right) = G_{ij} + 0 \qquad \square$$

Ugyanez mátrix-jelöléssel: $\boxed{\dot{P}(0) = G}$

Köv.: $\dot{P}(t) = P(t)\,G = G\,P(t) \quad \forall t \geq 0 \quad ; \; P(0) = \mathbb{1}$

Biz.: $P(t+s) = P(t)P(s) = P(s)P(t) \qquad / \frac{d}{ds}[\;\;]$

$$\frac{d}{ds} P(t+s) = P(t)\left[\frac{d}{ds}P(s)\right] = \left[\frac{d}{ds}P(s)\right]P(t) \qquad / \; s=0$$

$$\dot{P}(t) = P(t)\,G = G\,P(t) \qquad \square$$

[Megj.: Általában $A, B$ mátrixokra $AB \neq BA$, de jelen esetben $P(t)$ és $G$ a tétel szerint felcserélhető.]

Az $\dot{f}(t) = c\,f(t)$ diff.egyenlet mindenkinek ismerős, ha $f \in \mathbb{R}$. Ilyenkor a megoldása $f(t) = f(0)\,e^{ct}$.

Mátrixokkal sincs ez másképp:

Köv.: $\boxed{P(t) = \exp(tG)} \quad \forall t \geq 0$

[ahol egy $A$ négyzetes mátrixra $\exp(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ]

[Megj.: Nincs ezen semmi meglepő: diszkrét időben az időfejlődés $P(n) = P^n$ mértani sorozat — ennek folytonos megfelelője az exponenciális függvény.]

[Megj.: Ez alapján $P(t)$ explicit számolható, de ilyet mi most nem csinálunk.]

# Az eloszlás időfejlődése

ez alapján könnyű:

! $\Pi_i(t) = \mathbb{P}(X(t)=i)$ $\quad i=1,\dots,6$ a $t$ időbeli tartózkodási val. ségek

$\Pi(t) = (\Pi_1(t), \dots, \Pi_6(t))$ a $t$ idő-beli eloszlás <u>sor</u> vektor

Erre, pont mint diszkrét időben,

$$\Pi(t) = \Pi(0)\, P(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{\Pi}(t)} = \Pi(0)\,\dot{P}(t) = \Pi(0) P(t)\, G = \boxed{\Pi(t)\, G}$$

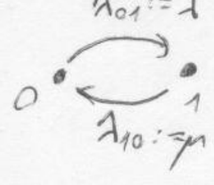
$\Downarrow$

Az eloszlás pontosan akkor konstans időben, ha

$$\dot{\Pi}(t) = \Pi(t)\, G = 0$$

<u>Tétel</u>: A $\Pi$ eloszlás sorvektor <u>stacionárius eloszlása</u> a Markov láncnak akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Pi\, G = 0} \Rightarrow \boxed{G^T \Pi^T = 0}$

<u>Pl. 1</u>: ON/OFF folyamat: $S = \{0, 1\}$




$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

~~$\Pi G = 0$ megoldása~~ $G^T \Pi^T = 0$ megoldása:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -\mu & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \mu/\lambda & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

vagyis $\Pi_0 = \frac{\mu}{\lambda} \Pi_1$,

pl. megoldása $\hat{\Pi} = (\mu \;\; \lambda)$,

lenormálva $\boxed{\Pi = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)}$

P12: születési–halálozási folyamat $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$0 \underset{\lambda_{10}}{\overset{\lambda_{01}}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\lambda_{21}}{\overset{\lambda_{12}}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\lambda_{32}}{\overset{\lambda_{23}}{\rightleftarrows}} 3 \underset{\lambda_{43}}{\overset{\lambda_{34}}{\rightleftarrows}} 4 \underset{\lambda_{54}}{\overset{\lambda_{45}}{\rightleftarrows}} 5 \underset{\lambda_{65}}{\overset{\lambda_{56}}{\rightleftarrows}} 6 \underset{\lambda_{76}}{\overset{\lambda_{67}}{\rightleftarrows}} 7 \underset{\lambda_{87}}{\overset{\lambda_{78}}{\rightleftarrows}} 8 \quad \dots$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} * & \lambda_{01} & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_{10} & * & \lambda_{12} & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_{21} & * & \lambda_{22} & \dots \\ \vdots & 0 & \lambda_{32} & * & \lambda_{34} \; \dots \\ \vdots & & 0 & & \ddots \\ \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{01} & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_{10} & -(\lambda_{10}+\lambda_{12}) & -\lambda_{12} & \dots & \\ 0 & 0 & -(\lambda_{21}+\lambda_{23}) & \lambda_{23} & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_{32} & & \ddots \\ \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

A stac. eloszlás ~~sz~~keresésére működik ugyanaz a trükk, mint diszkrét időben: Ha $\Pi$ stacionárius, akkor hosszú távon ugyanannyi ugrás lesz $3 \to 4$, mint $4 \to 3$, vagyis

$$\Pi_3 \lambda_{34} = \Pi_4 \lambda_{43} \Rightarrow \boxed{\Pi_4 = \frac{\lambda_{34}}{\lambda_{43}} \Pi_3}$$

és ugyanígy

$$\boxed{\Pi_{k+1} = \frac{\lambda_{k,k+1}}{\lambda_{k+1,k}} \Pi_k \quad k = 0, 1, 2, \dots}$$

$\boxed{\text{Tfh } \lambda_{k+1,k} > 0 \ \forall k}$

vagyis $\Pi = c(1, r_1, r_2, r_3 \dots)$ ahol

$$r_n = \frac{\lambda_{0,1}}{\lambda_{1,0}} \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{2,1}} \dots \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{k,k+1}}{\lambda_{k+1,k}}$$

[csak egy bonyolult leírása annak, hogy $r_0 = 1$, $r_{k+1} = \dfrac{\lambda_{k,k+1}}{\lambda_{k+1,k}}$]

Köv: Ha $S := 1 + r_1 + r_2 + r_3 + \dots < \infty$, akkor van stacionárius eloszlás, $\pi_0 = \frac{1}{S}$ és $\pi_k = \frac{r_k}{S}$ $\quad k = 1, 2, \dots$

~~ha pedig $S = \infty$~~

az egyetlen stac. eloszlás

[igazából több is lehet, ha némelyik $\lambda_{k+1,k} = 0$]

Ha pedig $S = \infty$, akkor nincs stac. eloszlás

Spec1:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2"] & 1 \arrow[l, bend left, "3"] \arrow[r, bend left, "2"] & 2 \arrow[l, bend left, "3"] \arrow[r, bend left, "2"] & 3 \arrow[l, bend left, "3"] \arrow[r, bend left, "2"] & 4 \arrow[l, bend left, "3"] \arrow[r, bend left, "2"] & 5 \arrow[l, bend left, "3"] \arrow[r, bend left, "2"] & 6 \arrow[l, bend left, "3"] & \dots \end{tikzcd}$$

[Figyelem: az éleken nem valószínűségek vannak, hanem ráták, amik lehetnek 1-nél nagyobbak]

ekkor $\pi_k \cdot 2 = \pi_{k+1} \cdot 3 \quad k = 0, 1, \dots$

vagyis $\pi_{k+1} = \frac{2}{3}\pi_k$, $\pi = c\left(1, \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2 \dots\right)$

amiből rögtön látszik, hogy

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi = \text{Pessz Geom}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \pi_k = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{array}}$$

Spec2:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "3"] & 1 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "3"] & 2 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "3"] & 3 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "3"] & 4 \arrow[l, bend left, "2"] & \dots \end{tikzcd}$$

Ekkor $\pi_k = \cancel{\pi_0\left(\frac{3}{2}\right)^k}\ c\left(\frac{3}{2}\right)^k \to \infty$ nem normálható $\Rightarrow$ NINCS stac. eloszlás.

## Hosszú távú viselkedés

Def: $X(t)$ stabil, ha $\forall \pi(0)$ kezdeti eloszlásra létezik a

$\pi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \pi(t)$ határeloszlás (ami igazi eloszlás, vagyis $\sum_{i\in S} \pi_i(\infty) = 1$),

és független a kezdeti eloszlástól.

[Pont mint diszkrét időben]

avagy: $\exists\, \pi$ eloszlásvektor, hogy $\forall \pi(0)$ kezdeti eloszlásra

$\pi(t) \to \pi$.

A stabilitás szempontjából persze most is fontos, hogy mindenhonnan mindenhova el lehet-e jutni: lehet kommunikáló osztályokat definiálni — pont, mint diszkrét időben: semmi izgalmas, kihagyom.

Ami a lényeg:

Def: A Markov lánc irreducibilis (avagy: az állapottér irreducibilis), ha mindenhonnan mindenhova el lehet jutni

[Vagyis $\forall\, i,k \in S$-re $\exists$ $i = j_1 \to j_2 \to j_3 \to \dots \to j_n = k$
véges hosszúságú útvonal, hogy minden élen $\underbrace{\lambda_{j_\ell, j_{\ell+1}}}_{\text{az ugrási ráta}} > 0$ ]

Jó hír: Folytonos időben nincs periodicitás jelenség: az exp. eloszlás bármilyen értéket felvehet, ezért ha $i$-ből $j$-be el lehet jutni, akkor bármennyi idő alatt el lehet.

<u>Véges állapottér</u> esetén nincs semmi izgalmas:

<u>Tétel</u> (stabilitás): Egy <u>véges állapoterű</u>, időben homogén, <u>folytonos idejű</u>, <u>irreducibilis</u> $X(t)$ Markov lánc stabil:

$\exists!\ \pi$ stac. eloszlás és $\pi(t) \to \pi$.

<u>Biz</u>: legyen $\Delta t > 0$, és legyen $Y_n = X(n\Delta t)$.

Ez az $Y_n$ diszkrét idejű M.L. ugyanazon a véges állapottéren; irreducibilis és aperiodikus (igazából minden átmenet-val.ség pozitív) $\Rightarrow \exists!\ \pi$ határeloszlása.

Ez a $\pi$ jó lesz az $X(t)$ határeloszlásának is ---

--- semmi meglepetés ---

$\square$

~~Tétel (ergodtétel)~~ $\boxed{\text{Ergodicitás}}$ Legyen $X(t)$ folytonos idejű, időben homogén, irreducibilis Markov lánc az $S$ véges állapottéren.

Legyen $f: S \to \mathbb{R}$ függvény – képezzük oszlopvektorrá:

Ha $S = \{0, 1, \dots, K\}$, akkor $f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(K) \end{pmatrix}$.

Pl: $f(i)$ a szállás ára az $i$-edik szállodában, $\frac{\text{peták}}{\text{óra}}$ egységben.

Ekkor az üzletemben százláskölltsége $T$ idő alatt

$$\int_0^T f(X(t))\,dt$$ – ami persze véletlen.

az átlagos óránkénti szállásköltség pedig az $f$ időátlaga:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\,dt$$ (persze $\frac{\text{peták}}{\text{óra}}$ egységben).

Tétel (ergodtétel) A fenti feltételek mellett

1 valószínűséggel

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\,dt \xrightarrow{T\to\infty} \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \mathbb{E}_\pi f = \underline{\pi}\,\underline{f},$$

ahol $\pi$ az egyetlen stacionárius eloszlás (sorvektor). Vagyis: időátlag = sokaság átlag.

Biz: Kihagyom, de nem túl nehéz.

Végtelen állapottér: az élet sokkal nehezebb és érdekesebb: sok minden lehet – nem megyünk bele.

Szerencsére ~~az 1-etlen~~ a számunkra igazán fontos 1-etlen eset könnyű – ez a születési-halálozási folyamat.

Tétel (szül-hal. folyamat stabilitása, bizonyítás nélkül)

Egy folytonos idejű, időben homogén, irreducibilis születési-halálozási folyamat (az $S = \mathbb{N}$ állapottéren) akkor és csak akkor stabil, ha van stacionárius eloszlása

(vagyis ha a $\pi_0 = c$; $\pi_{k+1} = \frac{\lambda_{k,k+1}}{\lambda_{k+1,k}} \pi_k \quad k = 0, 1, 2 \ldots$

rekurzióval definiált $(\pi_k)$ sorozat lenormálható).

És a határeloszlás persze az egyetlen stac. eloszlás.

Tétel (szül.hal. folyamat ergodicitása, bizonyítás nélkül)

Legyen $X(t)$ folytonos idejű, időben homogén, irreducibilis szül.-hal. folyamat az $S = \mathbb{N}$ állapottéren. Tegyük fel, hogy $X(t)$ stabil, határeloszlása $\pi$.

Legyen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény, és tegyük fel, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i |f(i)| < \infty$.

Ekkor 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X(t))\,dt \xrightarrow{T \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i f(i) = \mathbb{E}_\pi f = \pi f$$

$\square$

Megj: Ha egy szül-hal folyamat nem stabil, attól még lehet rekurrens – ami pl. azt jelenti, hogy $\forall$ állapotból 1 val. séggel eléri a 0-t.

~~Konstans~~ Jó tudni, hogy a

Spec. eset

- ~~stabil, ha~~ ha $\lambda < \mu$, akkor stabil (ezt már láttuk)
- ha $\lambda = \mu$, akkor nem stabil, de rekurrens
- ha $\lambda > \mu$, akkor nem is rekurrens, sőt

  $X(t) \to \infty$ 1 valószínűséggel és

  $\mathbb{E}X(t) \to \infty$.

## Kapcsolat a ~~p~~ beépített diszkrét idejű Markov lánccal

Legyen $X(t) \in S$ folytonos idejű, időben homogén Markov lánc, generátora $G$, vagyis $G_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & \text{ha } j = i \\ \lambda_{ij}, & \text{ha } j \neq i \end{cases}$,

ahol $\underline{\underline{\lambda}} = (\lambda_{ij})$ a ráta-mátrix, $\underline{\lambda} = (\lambda_i)$ a tartózkodási idő paraméter vektor.

Legyen $Y(n)$ ~~a~~ $\in S$ a beépített diszkrét idejű Markov lánc, vagyis ~~az X~~

$$Y(n) = \text{az } X(t) \text{ értéke az } n\text{-edik ugrás után.}$$

Láttuk, hogy $Y(n)$ átmenetmátrixa $\underline{Q}$, ahol

$$Q_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j = i \\ \dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}, & \text{ha } j \neq i. \end{cases}$$

Legyen $X(t)$ stacionárius eloszlása $\pi^{folyt} = (\pi_i^{folyt})_{i \in S}$,

és legyen $Y(n)$ —— // —— $\pi^{diszkr} = (\pi_i^{diszkr})_{i \in S}$.

<u>Kérdés:</u> Mi a kapcsolat $\pi^{folyt}$ és $\pi^{diszkr}$ között?

[<u>Megj:</u> Persze előfordulhat, hogy stac. eloszlás nincs, vagy több is van]

Tétel: $\Pi_i^{folyt} = c\,\dfrac{\Pi_i^{diszkr}}{\lambda_i}$, ahol $c$ ~~kons~~ normáló konstans

avagy $\Pi_i^{diszkr} = c'\,\lambda_i\,\Pi_i^{folyt}$, ahol $c'$ — || —.

Magyarázat: A diszkrét ⟷ folytonos áttérés során a stac. eloszlás szerinti valószínűségeket át kell súlyozni a tartózkodási idő paramétereivel

Pontosabban: Ha $\Pi^{diszkr}$ stac. eloszlása $Y(n)$-nek

és $\Pi_i^{f} = c\,\dfrac{\Pi_i^{diszkr}}{\lambda_i}$, akkor $\Pi^{f}$ stac. eloszlása ~~M~~ $X(t)$-nek

és fordítva: Ha $\Pi_i^{folyt}$ stac. eloszlása $X(t)$-nek és

$\Pi_i^{d} = c'\,\lambda_i\,\Pi_i^{folyt}$, akkor $\Pi^{d}$ stac. eloszlása $Y(n)$-nek.

Biz: Egyszerű számolás: abból, hogy $\Pi^{diszkr}(Q-1)=0$

$\Pi^{folyt}\,G = 0$ $\square$

Jó, de honnan lehet erre rájönni?

Válasz: Várjuk ki $N$ ugrást, ahol $N$ nagyon nagy (mondjuk $10^6$).

- Ez alatt kb $\Pi_i^{diszkr}\cdot N$ alkalommal járunk $i$-ben, minden $i\in S$-re
- minden alkalommal ott töltünk $\sim Exp(\lambda_i)$ időt, vagyis átlagosan

$\mathbb{E}(Exp(\lambda_i)) = \dfrac{1}{\lambda_i}$ időt : összesen kb. $\Pi_i^{diszkr} N \dfrac{1}{\lambda_i}$ időt

• Így az $N$ ugrás összesen kb

$$\sum_{i\in S} \pi_i^{diszkr} N \frac{1}{\lambda_i} = N \underbrace{\sum_{i\in S} \frac{\pi_i^{diszkr}}{\lambda_i}}_{=:\frac{1}{c}}$$ ideig tart,

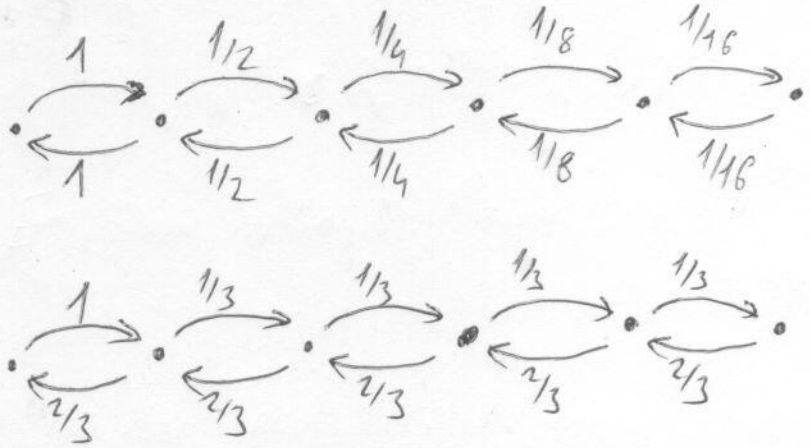
amiből $N \frac{\pi_i^{diszkr}}{\lambda_i}$-t töl~~töttünk~~jük $i$-ben

$\Rightarrow$ az összes folytonos idő $\dfrac{N \frac{\pi_i^{diszkr}}{\lambda_i}}{N \cdot \frac{1}{c}} = c \dfrac{\pi_i^{diszkr}}{\lambda_i}$

hányadát töltjük $i$-ben $\square$

Ez is egy torzított mintavétel!

P1: (elrettentő)



← folytonos időben

$\Downarrow$

← diszkrét időben

Ekkor $\pi^{diszkr}$ lenormálható, de $\pi^{folyt}$ nem.