

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

ZH, 2020 ősz, 2020.12.02, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Minden feladat 10 pontot ér.

1. Bergengóciában Móricka nagyon népszerű: minden 3 újságcikkből 2 róla szól (abban az értelemben, hogy minden újságcikk, a többitől függetlenül, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szól róla.

Amikor este Móricka a neten újságot olvas, válogatás nélkül rákattint minden cikkre, egészen addig, amíg el nem jut a 100-adik róla szóló cikkig. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy eközben legalább 100 egyéb cikket is talál!

2. Bergengóciában járvány terjed. Aki megfertőződik, az pontosan egy hétig fertőző (mielőtt meggyógyulna vagy karanténba kerülne). A bergengócok hetente egyszer tartanak házibulit, így mindenki legfeljebb 1 házibuliba mehet el úgy, hogy éppen fertőző. Ha egy fertőző ember kihagyja ezt az egy házibulit, akkor nem fertőz meg senkit. Ha viszont elmegy, akkor ott megfertőz 24 embert. Márpedig Bergengóciában mindenki minden héten az előzményektől függetlenül 5% valószínűséggel megy el a buliba.

Kezdetben Móricka az egyetlen fertőzőtt.

- a.) Várhatóan hányan lesznek fertőzöttek egy év (52 hét) elteltével?
 - b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 hét elteltével senki sem fertőzött?
 - c.) **Bónusz kérdés +4 pontért:** Mennyi a valószínűsége, hogy a járvány előbb-utóbb eltűnik, vagyis előbb-utóbb senki sem lesz fertőző?
3. Egy ereszcsonna sok szegeccsel van összeszerelve. Ezek mindegyike, a többitől függetlenül, valamilyen kis valószínűséggel rosszul van beverve, és kiáll: méterenként átlagosan 2. Ha Móricka sötétben mászik végig az ereszcsonnán, akkor minden kiálló szegecsbe – a többitől függetlenül – $\frac{1}{5}$ valószínűséggel belenyúl, és az elvágja a kezét.

Móricka 5 métert mászik az ereszen a sötétben. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kétszer elvágja a kezét?

4. Mórickát megkérlik a barátai, hogy hozza el nekik a tablettáikat a doktor bácsitól. 24 barátja van, ezek mindegyikének, a többitől függetlenül, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel van szüksége tablettára. Aki-nek szüksége van rá, annak a doktor bácsi véletlen számú tablettát küld, egyenletes eloszlással az $\{1, 2, 3\}$ halmazon, a többiektől függetlenül, és beteszi Móricka hátizsákjába.

a.) Írjuk fel a Móricka hátizsákjába kerülő tabletták számának generátorfüggvényét, **VAGY**

b.) **VAGY** számoljuk ki a hátizsákba kerülő tabletták számának várható értékét és szórását!

(Mindenkinek választhat, hogy az a.) vagy b.) feladatot oldja meg.)

5. Mórckák egy házibuliban háromféleképpen táncolnak: egyénileg, párban, illetve körben állva. Mindegyiket az előzményektől független exponenciális eloszlású véletlen idő után unják meg: az egyéni tánc átlagosan 2 percig, a páros átlagosan 3 percig, a körtánc átlagosan 5 percig tart. Ha valamelyiket megunták, váltanak: az egyéni tánc és a körtánc után érmedobással döntenek a másik két lehetőség közül, viszont a páros után mindig körtánc következik.

Modellezzük a táncot folytonos idejű Markov láncsal! Az időt mérjük percben!

- a.) Írjuk fel az állapotteret és az infinitezimális generátort!
- b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!
- c.) Hosszú távon az idő mekkora hányadát töltik körtánccal? Miért?
- d.) **Bónusz kérdés +4 pontért:** Átlagosan hány percenként váltanak formációt hosszú távon?