Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
pótZH, 2020 ősz, 2020.12.09, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Minden feladat 10 pontot ér.

Segítség: Szerintem a 4-es feladat a legnehezebb.

1. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit pontosan 5 percig. Ez alatt az 5 perc alatt véletlen számú új beteg érkezik és áll be a sorba: 0, 1 vagy 2, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$ valószínűséggel. A sor kint kanyarog a rendelő előtt, így akármilyen hosszú lehet.

   A rendelés reggel 06:00-kor kezdődik: ekkor megy be a rendelőbe vizsgálatra Móricka, aki eddig egyedül állt a rendelő előtt.

   Az orvos akkor tud megreggelizni, amikor valamelyik (5 perces) vizsgálat végeztével azt látja, hogy a sor üres.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az orvos valaha is meg tud reggelizni?

   b.) Várható értékben mennyi idő elteltével tud az orvos megreggelizni?

   (Tipp: tekintsük a sorban Móricka „utódainak” azokat a betegeket, akik az ő vizsgálata alatt érkeznek a sorba.)

2. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig, 5 perc várható értékkel. A rendelés 06:00-kor kezdődik, és ekkor már rengeteg beteg áll sorban: Móricka a 100-adik. Unalmában a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy legkésőbb 12:40-re túl lesz a vizsgálaton. Legfeljebb mennyi lehet Móricka becslésének a *hibája* a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételben szereplő konstanst vehetjük $C = 0.4748$-nak.)

   Segítség: Legyen X_i az i-edik beteg vizsgálatának hossza, Mórickát az $X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ összeg érdekli. Használhatjuk, hogy

   $$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left| x - \frac{1}{\lambda} \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}$$
   $$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left| x - \frac{1}{\lambda} \right|^3 \mathrm{d}x = \frac{\frac{12}{e} - 2}{\lambda^3} \approx \frac{2.4146}{\lambda^3}$$

3. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig, 5 perc várható értékkel. A rendelés 06:00-kor kezdődik, és ekkor már rengeteg beteg áll sorban: Móricka a 100-adik. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy legkésőbb 12:40-re túl lesz a vizsgálaton!

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).}$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$

4. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit pontosan 5 percig. (Ha az adott 5 perces intervallum elején nincs új beteg, akkor az orvos 5 percig kávézik.) A sor a váróteremben a szigorú távolságtartási szabályok miatt legfeljebb 5 főből állhat: aki ezen felül érkezne, az elkullog. (Így azzal az 1 fővel együtt, aki éppen vizsgálat alatt áll, legfeljebb 6 beteg lehet az épületben.) A vizsgálat (vagy kávézás) 5 perce alatt véletlen számú új beteg érkezik: 0, 1 vagy 2, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$ valószínűséggel, és beállnak a sorba (már ha van hely).

   A rendelés reggel 06:00-kor kezdődik: ekkor megy be a rendelőbe vizsgálatra Móricka, aki eddig egyedül állt a rendelő előtt.

   Legyen X_n a sorban álló betegek száma, *nem beleértve azt, akit éppen vizsgálnak*, $n \cdot 5$ perc elteltével, *közvetlenül az után*, hogy az aktuális beteget behívták.

   a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc állapotterét! *(Vigyázat: a váróteremben legfeljebb* 5 *fő lehet* ***mielőtt*** *egyet behívnak!)*

   b.) Ha $X_5 = 2$, akkor mik az X_6 lehetséges értékei?

   c.) Ha $X_5 = 4$, akkor mik az X_6 lehetséges értékei? *(Vigyázat!)*

   d.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenet-mátrixát *vagy* rajzoljuk le a gráf-reprezentációját! (Amelyik kényelmesebb.)

   e.) Körülbelül mennyi a $\mathbb{P}(X_{60} = 0)$ valószínűség? Miért?

   f.) **Bónusz kérdés +4 pontért:** Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 11:00 és 11:05 között az orvos kávézik? *(Vigyázat: cseles kérdés.)*

5. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig, 5 perc várható értékkel. A betegek szintén egyesével érkeznek, az előzményektől (és a vizsgálati idők hosszától) független, exponenciális eloszlású időközönként – átlagosan ötpercenként. A sor a váróteremben a szigorú távolságtartási szabályok miatt legfeljebb 5 főből állhat: aki ezen felül érkezne, az elkullog. (Így azzal az 1 fővel együtt, aki éppen vizsgálat alatt áll, legfeljebb 6 beteg lehet az épületben.)

   Legyen $X(t)$ az épületben lévő betegek száma *beleértve azt is, akit éppen vizsgálnak*, t idő elteltével. **Az időt mérjük percben!**

   a.) Írjuk fel az $X(t)$ Markov lánc állapotterét!

   b.) Rajzoljuk fel az $X(t)$ Markov lánc gráf-reprezentációját!

   c.) A rendelés 06:00-kor kezdődik, ekkor még nincs ott egy beteg se. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy a rendelő 11:00-kor üres?

   d.) **Bónusz kérdés +4 pontért:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?