Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
pótZH megoldások, 2020 ősz, 2020.12.09, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Minden feladat 10 pontot ér.

Segítség: Szerintem a 4-es feladat a legnehezebb.

1. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit pontosan 5 percig. Ez alatt az 5 perc alatt véletlen számú új beteg érkezik és áll be a sorba: 0, 1 vagy 2, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$ valószínűséggel. A sor kint kanyarog a rendelő előtt, így akármilyen hosszú lehet.

   A rendelés reggel 06:00-kor kezdődik: ekkor megy be a rendelőbe vizsgálatra Móricka, aki eddig egyedül állt a rendelő előtt.

   Az orvos akkor tud megreggelizni, amikor valamelyik (5 perces) vizsgálat végeztével azt látja, hogy a sor üres.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az orvos valaha is meg tud reggelizni?

   b.) Várható értékben mennyi idő elteltével tud az orvos megreggelizni?

   (Tipp: tekintsük a sorban Móricka „utódainak” azokat a betegeket, akik az ő vizsgálata alatt érkeznek a sorba.)

   Megoldás:

Legyen Móricka egymaga a „nulladik generáció"-ja a betegeknek, $n \geq 1$-re pedig az „n-edik generáció" álljon azon betegekből, akik az $(n-1)$-edik generáció vizsgálata alatt érkeztek.

Legyen Z_n az n-edik generáció létszáma $(n = 0, 1, \dots)$

Így Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, $Z_0 = 1$, és az 1-lépéses utódszám-eloszlás

k	0	1	2
$\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Ennek várható értéke $m = \frac{0+1+2}{3} = 1$

$\Rightarrow$ a folyamat kritikus (és nem elfajult).

a.) Reggelizni tud $\Leftrightarrow$ a folyamat kihal, márpedig kritikus, nem elfajult G-W folyamatra $\boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1}$.

b.) A reggelig eltelt idő $N \cdot 5$ perc, ahol $N = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots$ a folyamat össz-elemszáma.

Mivel a folyamat kritikus, $\mathbb{E}N = \infty$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(\text{eltelt idő}) = \infty}$.

2. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig, 5 perc várható értékkel. A rendelés 06:00-kor kezdődik, és ekkor már rengeteg beteg áll sorban: Móricka a 100-adik. Unalmában a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy legkésőbb 12:40-re túl lesz a vizsgálaton. Legfeljebb mennyi lehet Móricka becslésének a *hibája* a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételben szereplő konstanst vehetjük $C = 0.4748$-nak.)

   Segítség: Legyen X_i az i-edik beteg vizsgálatának hossza, Mórickát az $X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ összeg érdekli. Használhatjuk, hogy

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left| x - \frac{1}{\lambda} \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left| x - \frac{1}{\lambda} \right|^3 \mathrm{d}x = \frac{\frac{12}{e} - 2}{\lambda^3} \approx \frac{2.4146}{\lambda^3}$$

Megoldás:

Ha az idő percben mérjük, akkor $X_i \sim Exp(\lambda)$
ahol $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$, és $X_1, X_2, \ldots$ független.
$n=100$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ jelöléssel Mérickát
a $\mathbb{P}(S_n \leq 400)$ valószínűség érdekli.

Erre a CHT közelítés hibája a Berry-Esseen tétel
szerint legfeljebb

$$\text{hiba} \leq \frac{C\delta}{\sigma^3\sqrt{n}}, \text{ ahol } \quad C = 0.4748$$

$n = 100$
$\sigma = DX_i$ (szórás)
$\delta = \mathbb{E}(|X_i - \mathbb{E}X_i|^3)$ centrált abszolút 3adik momentum.

Esetünkben $X_i \sim Exp(\lambda)$
sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, $\underline{\underline{\mathbb{E}X_i = \frac{1}{\lambda}}}$

$$\Rightarrow \sigma^2 = Var\, X_i = \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 dx \overset{\text{segítség}}{=\!=} \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\delta = \mathbb{E}\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right|^3\right) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left|x - \frac{1}{\lambda}\right|^3 dx \overset{\text{segítség}}{\approx} \frac{2.4146}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{hiba}}} \leq \frac{0.4748 \cdot \frac{2.4146}{\lambda^3}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 \sqrt{100}} \overset{\text{nem meglepő módon } \lambda \text{ kiesik}}{=\!=\!=} \frac{0.4748 \cdot 2.4146}{10} \approx 0.115$$

$$= \underline{\underline{11.5\%}}$$

3. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig, 5 perc várható értékkel. A rendelés 06:00-kor kezdődik, és ekkor már rengeteg beteg áll sorban: Móricka a 100-adik. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy legkésőbb 12:40-re túl lesz a vizsgálaton!

   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$

   Megoldás:

1. megoldás: Legyen $\boxed{n=100}$, X_i az i-edik beteg vizs-
gálatával eltelt idő percben, $\boxed{X_i \sim Exp(\lambda)}$ függetlenek,

$EX_i = \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{5}}$. $S_n := X_1 + \dots + X_n$ a Mdricka vizsgálatának végéig eltelt idő. $\boxed{m := \mathbb{E} X_i = 5}$

A kérdés a $\mathbb{P}(S_n \le 400) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \le 4)$ valószínűség.

Mivel az X_i-k függetlenek, azonos eloszlásúak, a Cramér tétel szerint $a=-\infty$, $b=4$ jelöléssel

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le 4\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b]\right) \overset{b<m}{\lesssim} e^{-nI(b)}, \text{ ahol}$$

$I(x)$ a $\lambda = \frac{1}{5}$ paraméterű Exp. eloszlás rátafüggvénye.

A segítség szerint $x=4$, $\lambda = \frac{1}{5}$ helyettesítéssel

$$I(b) = \frac{1}{5}\cdot 4 - \ln\left(\frac{1}{5}\cdot 4\right) - 1 = \frac{4}{5} - \ln\frac{4}{5} - 1 \approx 0.0231$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le 4\right) \lesssim e^{-100\cdot 0.0231} = e^{-2.31} \approx 0.099 = \underline{\underline{9{,}9\%}}}$$

2. megoldás: legyen $n=400$, és legyen $i=1,2,3\ldots$-re

Y_i az i-edik percben távozó betegek száma.

Mivel a betegek Poisson folyamat szerint távoznak $\lambda=\frac{1}{5}\left(\frac{\text{fő}}{\text{perc}}\right)$ rátával, az Y_i-k függetlenek, $Y_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

A kérdés, hogy $\boxed{n=400}$ perc alatt távozik-e legalább 100 beteg (így Móricka is): $S_n := Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$ jelöléssel $\mathbb{P}(S_n \geq 100)=?$

Mivel az Y_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak, a Cramér tétel szerint $a=\frac{1}{4}$, $b=\infty$, $m=EX_i=\frac{1}{5}$ jelöléssel

$$\mathbb{P}(S_n \geq 100) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{4}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,\infty)\right) \overset{a>m}{\lessapprox} e^{-nI(a)},$$

ahol $I(x)$ a $\lambda=\frac{1}{5}$ paraméterű Poi eloszlás rdta fv-e.

A segítség szerint $x=\frac{1}{4}$, $\lambda=\frac{1}{5}$ választással

$$I(a) = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \approx 0.005786$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(S_n \geq 100) \lessapprox e^{-400\cdot 0.005786} \approx e^{-2.31} \approx 0.099 = \underline{9.9\%}}$$

4. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit pontosan 5 percig. (Ha az adott 5 perces intervallum elején nincs új beteg, akkor az orvos 5 percig kávézik.) A sor a váróteremben a szigorú távolságtartási szabályok miatt legfeljebb 5 főből állhat: aki ezen felül érkezne, az elkullog. (Így azzal az 1 fővel együtt, aki éppen vizsgálat alatt áll, legfeljebb 6 beteg lehet az épületben.) A vizsgálat (vagy kávézás) 5 perce alatt véletlen számú új beteg érkezik: 0, 1 vagy 2, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$ valószínűséggel, és beállnak a sorba (már ha van hely).

A rendelés reggel 06:00-kor kezdődik: ekkor megy be a rendelőbe vizsgálatra Móricka, aki eddig egyedül állt a rendelő előtt.

Legyen X_n a sorban álló betegek száma, *nem beleértve azt, akit éppen vizsgálnak*, $n \cdot 5$ perc elteltével, *közvetlenül az után*, hogy az aktuális beteget behívták.

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc állapotterét! *(Vigyázat: a váróteremben legfeljebb 5 fő lehet* ***mielőtt*** *egyet behívnak!)*

b.) Ha $X_5 = 2$, akkor mik az X_6 lehetséges értékei?

c.) Ha $X_5 = 4$, akkor mik az X_6 lehetséges értékei? *(Vigyázat!)*

d.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenet-mátrixát *vagy* rajzoljuk le a gráf-reprezentációját! (Amelyik kényelmesebb.)

e.) Körülbelül mennyi a $\mathbb{P}(X_{60} = 0)$ valószínűség? Miért?

f.) **Bónusz kérdés +4 pontért:** Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 11:00 és 11:05 között az orvos kávézik? *(Vigyázat: cseles kérdés.)*

Megoldás:

a.) Az állapottér $\boxed{S=\{0,1,2,3,4\}}$, mivel a beteg behívása előtt közvetlenül ≤ 5 fő lehet a sorban, ebből ≤ 4 marad, ha 1 bemegy.

b.) Ha nem érkezik senki, $X_6 = X_5 - \underbrace{1}_{\text{1 bemegy}} = 1$

Ha 1 valaki érkezik $X_6 = X_5 + 1 - 1 = 2$

Ha 2 —//—, $X_6 = X_5 + 2 - 1 = 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{1,2,3 lehet } X_6}$

c.) Ha nem érkezik senki, $X_6 = X_5 - 1 = 3$

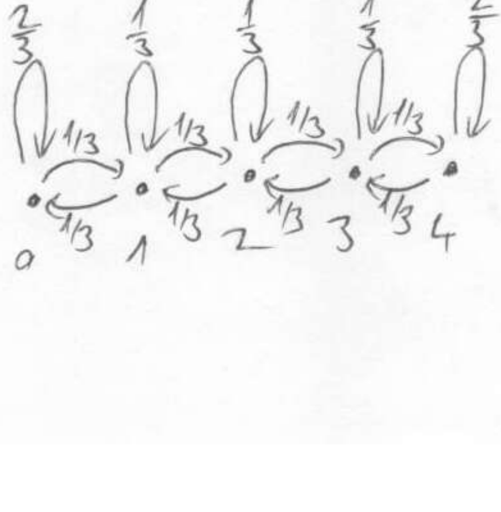
Ha 1 valaki érkezik, $X_6 = X_5 + 1 - 1 = 4$

Ha 2 érkezik, akkor az egyik elkallog, mert különben 5 fölé nőne a sor, $\Rightarrow X_6 = 5 - 1 = 4$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{3 vagy 4}}$ lehet X_6.

d.) Az előzőek alapján X_n 1 lépésben 1-gyel csökken, vagy változatlan marad, vagy 1-gyel nő $\Big\}$ $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ val. séggel, hacsak nem

- $X_n = 4$, mert akkor nem nőhet, cserébe $2/3$ val.séggel változatlan
- $X_n = 0$, mert akkor nem csökkenhet, cserébe $2/3$ val.séggel változatlan:



$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

e.) X_n születési-halálozási folyamat. ~~Ebből~~, irreducibilis,

egyetlen stacionárius eloszlása olyan, hogy

$\pi_0 \cdot \frac{1}{3} = \pi_1 \cdot \frac{1}{3}$; $\pi_1 \cdot \frac{1}{3} = \pi_2 \frac{1}{3}$ - - ; $\pi_3 \cdot \frac{1}{3} = \pi_4 \cdot \frac{1}{3}$

vagyis $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 \Rightarrow$ π egyenletes,

$$\pi = \left(\frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \right)$$

Avagy: P duplán sztochasztikus mátrix: minden oszlop-összeg is $1 \Rightarrow$ stacionárius az egyenletes eloszlás. $\pi = \left(\frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{1}{5} \right)$

Avagy: ugyanaz jön ki a $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával.

Köv: Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, $n=60$ pedig hosszú idő, a Markov láncok alaptétele szerint $\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0) \approx \pi_0 = \frac{1}{5} = 20\%}$.

f.) Abból, hogy a sorhossz 0, önmagában nem következik, hogy az orvos kávézik: a rendelőben lehet 1 beteg.

Ahhoz, hogy 11:00 és 11:05 között kávézzon, az kell, hogy

- 10:55:01-kor a váróterem üres legyen (pl. mert éppen behívta az egyetlen várakozót). Ennek valsége $\approx \frac{1}{5}$
- ÉS a 10:55-től 11:00-ig eltelt 5 percben ne érkezzen senki. Ennek val.sége $\frac{1}{3}$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{kávézik}) \approx \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \approx 6.7\%}$$

5. Egy orvos a betegeit egyesével vizsgálja: mindenkit az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig, 5 perc várható értékkel. A betegek szintén egyesével érkeznek, az előzményektől (és a vizsgálati idők hosszától) független, exponenciális eloszlású időközönként – átlagosan ötpercenként. A sor a váróteremben a szigorú távolságtartási szabályok miatt legfeljebb 5 főből állhat: aki ezen felül érkezne, az elkullog. (Így azzal az 1 fővel együtt, aki éppen vizsgálat alatt áll, legfeljebb 6 beteg lehet az épületben.)

   Legyen $X(t)$ az épületben lévő betegek száma *beleértve azt is, akit éppen vizsgálnak*, t idő elteltével. **Az időt mérjük percben!**

   a.) Írjuk fel az $X(t)$ Markov lánc állapotterét!

   b.) Rajzoljuk fel az $X(t)$ Markov lánc gráf-reprezentációját!

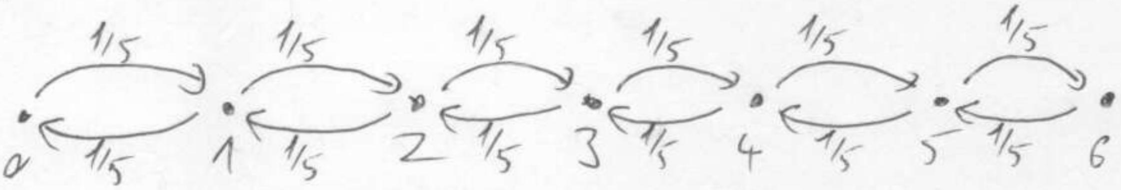
   c.) A rendelés 06:00-kor kezdődik, ekkor még nincs ott egy beteg se. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy a rendelő 11:00-kor üres?

   d.) **Bónusz kérdés +4 pontért:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?

   Megoldás:

a.) $S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ a szöveg szerint.

b.) $X(t)$ születési-halálozási folyamat, a születés és a halálozás (érkezés / távozás) rátája is $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{\text{fő}}{\text{perc}}\right)$, kivéve persze, ha $X(t)=0$ vagy $X(t)=6$. Ezért



c.) A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos ~~idejű~~ idejű, $t:=300$ perc hosszú idő, ezért a Markov láncok (folyt. idejű) alaptétele szerint

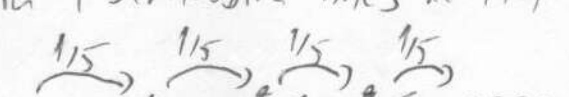
$$\mathbb{P}(X(t)=0)\simeq\pi_0$$, ahol π az egyetlen stac. eloszlás.

Mivel $X(t)$ születési-halálozási folyamat, a stac. eloszlása leolvasható: $\pi_0\cdot\frac{1}{5}=\pi_1\cdot\frac{1}{5}$; $\pi_1\cdot\frac{1}{5}=\pi_2\cdot\frac{1}{5}$; ... ; $\pi_5\cdot\frac{1}{5}=\pi_6\cdot\frac{1}{5}$

vagyis $\pi_0=\pi_1=\pi_2=\ldots=\pi_6$: $\boxed{\pi \text{ egyenletes}}$

$$\pi=\left(\frac{1}{7}\ \frac{1}{7}\ \ldots\ \frac{1}{7}\right)\Rightarrow\boxed{\mathbb{P}(X(300)=0)\simeq\pi_0=\frac{1}{7}\simeq 14.3\%}$$

d.) Ha a sorhosszra nincs korlát, a gráf-reprezentáció



amiből továbbra is $\pi_0=\pi_1=\pi_2=\ldots$

Ez nem normálható $\Rightarrow$ nincs stac. eloszlás $\Rightarrow$ a Markov lánc nem pozitív rekurrens $\Rightarrow\forall i\ \mathbb{P}(X(t)=i)\xrightarrow{t\to\infty}0$

$$\Rightarrow\boxed{\mathbb{P}(X(300)=0)\simeq 0}$$