Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
házi feladatok, 2017 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2017.09.27.)

HF 1.1 Egy országban minden tízezredik ember HIV fertőzött. A fertőzöttség vizsgálatára hivatott AIDS teszt megbízhatósága 99%, abban az értelemben, hogy a fertőzötteken elvégzett tesztek 1%-a ad (hibásan) negatív eredményt, illetve az egészségeseken elvégzett tesztek 1%-a ad (hibásan) pozitív eredményt.

Mórickát véletlenszerűen kisorsolták a teljes népességből. Elvégezték rajta a tesztet, és pozitív lett. Mi a valószínűsége, hogy Móricka valóban fertőzött?

HF 1.2 Pistike minden nyári este tesz egy sétát, és közben az eget nézi, hullócsillagokat figyelve. Egy este átlagosan 4-et szokott látni. Ennek megfelelően, ha 4-et vagy többet lát, akkor vidáman megy haza, ha viszont kevesebbet, akkor bánatosan.

Pistike augusztus 16-án bánatosan ment haza. Ezt tudva, mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen hullócsillagot sem látott?

(Rávezető kérdés: Legyen X a Pisike által augusztus 16-án látott hullócsillagok száma - ami persze egy valószínűségi változó. Mi X eloszlása? Pontosabban: Milyen eloszlással jó modellezni X-et?)

2.HF: (Beadási határidő: 2017.10.11.) *(Hibás határidő javítva, bocs.)*

HF 2.1 Legyen X és Y két független valószínűségi változó, X binomiális $n_1 = 10$ és $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel, Y pedig binomiális $n_2 = 5$ és $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel.

a.) Mi X generátorfüggvénye?

b.) Mi Y generátorfüggvénye?

c.) Mi $Z := X + Y$ generátorfüggvénye?

d.) Mi Z eloszlása? (Értsd: adjuk meg Z lehetséges értékeit és ezek valószínűségeit, *vagy* mondjuk meg az eloszlás nevét.)

HF 2.2 Egy véletlen rekurzív algoritmus futása során kezdetben elindul egyetlen folyamat, melynek sorsa kétféle lehet:

i.) Eredményesen lefut és kilép anélkül, hogy újabb folyamatot indítana. Ennek valószínűsége legyen p.

ii.) Mielőtt lefutna, véletlen számú újabb folyamatot indít, amik ugyanolyanok, mint ő maga. Ezek száma lehet 1, 2 vagy 3, azonos (vagyis $\frac{1-p}{3}$) valószínűséggel. Az eredeti folyamat csak akkor lép ki, amikor ezek mind lefutottak.

Az algoritmus futása során elinduló egyes folyamatok mind ugyanolyan eloszlással hoznak létre újabb folyamatokat, függetlenül egymástól és az előzményektől.

Kezdetben egyetlen folyamat indul el – legyen ez egymaga a „nulladik generáció". Az „első generáció" álljon a legelső folyamat által indított folyamatokból (ha van ilyen). A „második generáció" álljon az első generáció tagjai által indított folyamatokból. És így tovább, az $n + 1$-edik generáció álljon az n-edik generáció tagjai által indított folyamatokból, $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemeinek számát. Legyen $X = Z_1$, és legyen $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ az algoritmus futása során elinduló folyamatok össz-száma.

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I.) ha $p = 0.6$

II.) ha $p = 0.4$.

a.) Mi X eloszlása?

b.) $\mathbb{E}X = ?$

c.) Mi X generátorfüggvénye?

d.) $\mathbb{E}Z_{40} = ?$

e.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

f.) $\mathbb{E}N = ?$

g.) $\mathbb{P}(Z_4 = 0) = ?$

h.) Mennyi a valószínűsége, hogy az algoritmus előbb-utóbb lefut, vagyis hogy valamelyik generáció már üres? (Avagy: annak a valószínűsége, hogy a legelső folyamat előbb-utóbb kilép.)

3.HF: (Beadási határidő: 2017.11.15.)

HF 3.1 Egy bolha a számegyenesen ugrál: a nullából indul, és minden másodpercben 1 egységnyit ugrik: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pozitív irányba (jobbra), $\frac{1}{2}$ valószínűséggel negatív irányba (balra), az előzményektől függetlenül. Legyen X_n a bolha helye n ugrás után. Vagyis ha az i-edik ugrás $\xi_i \in \{-1, 1\}$, akkor $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. (Ez az egyszerű szimmetrikus bolyongás).

a.) Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak a valószínűségét, hogy $n = 2500$ ugrás után a bolha legalább $K = 200$ lépésre jobbra van a kiinduló helyétől.

b.) Legfeljebb mekkora lehet a CHT közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

c.) Adjunk ugyenerre a valószínűségre felső becslést a Hoeffding-egyenlőtlenség segítségével!

d.) Becsüljük meg a keresett valószínűséget a Cramér tétel alkalmazásával is.

(Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

(ha $0 < x < 1$).)

HF 3.2 Bergengóciában minden nap $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik az eső, az előzményektől függetlenül. A bergengóc királyi palota kertészének akkor kell locsolnia, ha három napja nem érte víz a kertet – vagyis az előző három napon se eső nem volt, se locsolás. Hosszú távon a napok hány százalékán nem kapnak vizet a növények? *(Segítség: jelöljük X_n-nel, hogy az n-edik napon éjfélkor éppen hány napja nem érte víz a kertet.)*

4.HF: (Beadási határidő: 2017.11.29.)

HF 4.1 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (rátamátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük* ***valamelyik****?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?

d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?

e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

HF 4.2 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyereket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

a.) A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.

b.) A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$-a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

5.HF: (Beadási határidő: 2017.12.07.)

HF 5.1 a.) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

ahol $0 < \theta < \infty$ paraméter, és nem ismerjük. Mintát vettünk X-ből, és azt kaptunk, hogy 0.997; 0.8; 0.853; 0.975; 0.986; 0.927; 0.936; 0.879; 0.767; 0.912. Adjunk maximum likelihood becslést θ-ra!

b.) **bónusz:** A táblázatkezelőben egy n-szer tizes táblázat minden elemébe `rand()` -ot írtam, minek hatására a táblázatkezelő kitöltötte a táblázatot független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású (pszeudo-)véletlen számokkal. Ezek után kikerestettem mind a 10 oszlop maximumát, és átmásoltam (kerekítve) a matekpéldába. Azt kaptam, hogy 0.997; 0.8; 0.853; 0.975; 0.986; 0.927; 0.936; 0.879; 0.767; 0.912. Vajon mennyi lehetett az n?

HF 5.2 A közönséges szibériai turul vérnyomása (higanymilliméterben) normális eloszlású valószínűségi változó, várható értéke m, ami egyedenként változó, szórása mindig $\sigma = 20$. A madár akkor egészséges, ha $m = 200$. Egy közönséges szibériai turulnak megmértük a vérnyomását 10 különböző napon (ezek már függetlennek tekinthetők), és azt kaptuk, hogy 216; 179; 199; 199; 163; 175; 193; 190; 201; 223. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a turul egészséges!