Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
házi feladatok, 2018 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2018.09.26.)

HF 1.1 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

Megoldás:

a.) Legyen X a Móricka szeletébe kerülő mazsolák száma. X jó közelítéssel Poisson eloszlású, mert sok mazsola próbálkozik, hogy bekerüljön, mindegyik a többitől függetlenül kis valószínűséggel jár sikerrel, X pedig a sikeres próbálkozók száma. A λ paraméter pedig a várható érték: $\lambda = 6$. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X<2) &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}+e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}(1+\lambda) = \\ &= 7e^{-6} \approx 0.017 = 1.7\%. \end{aligned}$$

b.) Legyen Y a mazsolák száma Pistike szeletében. Mivel a kondér nagy és a mazsola sok, X és Y jó közelítéssel független, így

$$\mathbb{P}(X<2 \,|\, Y=12) = \mathbb{P}(X<2) \approx 1.7\%$$

továbbra is.

HF 1.2 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

Megoldás: Az időt mérjük órában. Így a csörgések Poisson folyamatának rátája $\frac{1}{2}$. Legyen X_t a film kezdetétől számítva t idő alatt a csörgések száma, T pedig az első csörgésig eltelt idő. Tudjuk, hogy $X_t \sim Poi(t\cdot\lambda)$, de azt is, hogy $T \sim Exp(\lambda)$.

a.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{2.5}=0) = \mathbb{P}(Poi(2.5\cdot\frac{1}{2})=0) = e^{-1.25}\frac{1.25^0}{0!} = e^{-1.25} \approx 0.287$.
2. megoldás: $\mathbb{P}(T>2.5) = 1-\mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2})<2.5) = 1-(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 2.5}) = e^{-1.25} \approx 0.287$.

b.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{0.5}>0) = 1-\mathbb{P}(Poi(0.5\cdot\frac{1}{2})=0) = 1-e^{-0.25}\frac{0.25^0}{0!} = 1-e^{-0.25} \approx 0.221$. **2. megoldás:** $\mathbb{P}(T<0.5) = \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2})<0.5) = 1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 0.5} = 1-e^{-0.25} \approx 0.221$.

c.) **1. megoldás:** Poisson folyamat ritkítása is Poisson folyamat: ha csak a Jancsi által felvett hívásokat nézzük, azok is Poisson folyamatot alkotnak, csak a ráta ezúttal $\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mivel óránként átlag $\frac{1}{4}$ hívást vesz fel. Így, ha $Y_{2.5}$ a Jancsi által 2.5 óra alatt felvett hívások száma, akkor $Y_{2.5} \sim Poi(2.5 \cdot \mu) = Poi(0.625)$. Így

$$\mathbb{P}(Y_{2.5} > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 0) - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

2. megoldás: Legyen $X = X_{2.5}$ a telefoncsörgések teljes száma, $X \sim Poi(\rho)$ ahol $\rho = 1.25$, és legyen Y a Jancsi által felvett telefonok száma. Az $X = n$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása binomiális, éspedig $(n, p = \frac{1}{2})$ paraméterekkel. Vagyis $q = 1 - p$ jelöléssel $n = 0, 1, 2, \ldots$-re

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{ha } k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{ha } k > n, \text{ persze} \end{cases}.$$

Ebből a teljes valószínűség tétele szerint minden $k = 0, 1, 2 \ldots$-re

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ez az összeg szerencsére kiszámolható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-t kiírva $n!$ kiesik, utána pedig kézenfekvő az $l := n - k$ jelölés, ha már n úgy is csak k-tól fut:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\rho} \rho^{l+k} \frac{1}{k!l!} p^k q^l = e^{-\rho} \frac{(p\rho)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q\rho)^l}{l!}.$$

Az utolsó szumma kedves ismerősünk, mivel $e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$. Így

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\rho} \frac{(p\rho)^k}{k!} e^{q\rho} = e^{-p\rho} \frac{(p\rho)^k}{k!}.$$

Vagyis sikerült kézzel bebizonyítanunk, hogy Poisson eloszlás ritkítása is Poisson eloszlás, éspedig $Y \sim Poi(p\rho)$.
Innen pedig, mivel $p\rho = \frac{1}{2} \cdot 1.25 = 0.625$,

$$\mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

2.HF: (Beadási határidő: 2018.10.10.)

HF 2.1 a.) Legyen az X valószínűségi változó Poison eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel, és legyen $Y = 2 + 3X$. Mi Y generátorfüggvénye?

b.) Egy Z valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{\ln\left(1 - \frac{z}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$. Adjuk meg Z eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Z = k)$ valószínűségeket, ahol $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Megoldás:

a.) Amint azt órán kiszámoltuk, X generátorfüggvénye $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)} e^{2(z-1)}$. Ebből $Y = 2 + 3X$ generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \mathbb{E}(z^{2+3X}) = z^2 \mathbb{E}\left((z^3)^X\right) = z^2 g_X(z^3) = z^2 e^{2(z^3-1)}.$$

b.) $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k) z^k$, vagyis $g(z)$ Taylor sorfejtésével kapjuk a keresett valószínűségeket, mint együtthatókat. Ehhez $g(0) = 0$ és

$$g'(z) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2 \ln 2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1} \ln 2} z^l,$$

amiből tagonkénti integrálással

$$g(z) = g(0) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}\ln 2} \frac{z^{l+1}}{l+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k \ln 2} z^k.$$

Ebből

$$\mathbb{P}(Z = k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 0 \\ \frac{1}{k2^k \ln 2} & \text{ha k>0} \end{cases}.$$

HF 2.2 Egy kis boltba a vevők szabályos időközönként érkeznek, percenként pontosan egy, és beállnak a sorba. Egy vevő kiszolgálása véletlen ideig tart, ami minden vevő esetén független és azonos eloszlású. Konkrétan a kiszolgálási idő 0, 1 vagy 2 perc lehet, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ illetve $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. (Ez úgy lehet, hogy a vevők fele, miután sorra kerül, csak körbenéz, látja, hogy nincs az, amit keres, és rögtön kimegy.)

Reggel 08:00-kor bejön a legelső vevő: nevezzük őt egymagát a *nulladik generáció*nak. A legelső vevő kiszolgálása idején érkező újabb vevőket (akikből lehet 0, 1 vagy 2) nevezzük az *első generáció*nak. És így tovább: azokat, akik az n-edik generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkeznek, nevezzük az $(n+1)$-edik generációnak $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Jelölje Z_n az n-edik generáció tagjainak számát.

a.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

b.) Mi Z_3 generátorfüggvénye?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a boltos bácsi egyszer szünetet tarthat, vagyis hogy a boltban egyszer csak (egy percig) nem lesz egyetlen vevő sem?

e.) Mennyi az első szünetig eltelt percek számának várható értéke?

f.) Mennyi az első szünetig eltelt percek számának generátorfüggvénye?

Megoldás: Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, az X egylépéses utódszám eloszlása

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ennek várható értéke $m := \mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, generátorfüggvénye pedig

$$g(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2.$$

Ezek alapján az órai jelölésekkel

a.) $\mathbb{E}Z_{10} = m_{10} = m^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0.017$

b.) Z_3 generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} g_{Z_3}(z) = g(g(g(z))) = & \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right)^2\right) \\ & + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right)^2\right)^2 \end{aligned}$$

c.) $r_4 := \mathbb{P}(Z_4 = 0) = g_{Z_4}(0) = g(g(g(g(0))))$, de senki se szeretné $g_{Z_4}(z)$ képletét felírni. Inkább rekurzívan számolunk:

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0 \\
r_1 &= g(r_0) = g(0) = \frac{1}{2} = 0.5 \\
r_2 &= g(r_1) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24} \approx 0.7083 \\
r_3 &= g(r_2) = g\left(\frac{17}{24}\right) = \cdots = \frac{2833}{3456} \approx 0.8197 \\
r_4 &= g(r_3) \approx 0.8852
\end{aligned}$$

d.) A boltos bácsi pontosan akkor tarthat szünetet, ha az elágazó folyamat kihal, vagyis van olyan n, amire $Z_n = 0$. Ennek valószínűsége $r_\infty = 1$, mivel $m < 1$, vagyis a folyamat szubkritikus.

e.) **Második, javított változat** – *köszönet az éber hallgatóknak.* Az első szünetig eltelt percek száma pontosan $T := N - 1$, ahol $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ a kihalásig összesen kiszolgált vevők száma. Azért $N - 1$, mert

- $*$ Először is, a kiszolgált vevők száma megegyezik az érkező vevők számával, hiszen mindenkit ki kell szolgálni. Mivel a vevők pontosan percenként érkezenek, a számuk pont az eltelt idő, annak ellenére, hogy a kiszolgálási idő véletlen.
- $*$ Másodszor, a legelső vevő érkezésére nem kell várni, mint ahogy az utolsó vevő távozására sem: a szünet előtti utolsó vevőt biztosan 0 perc alatt szolgálják ki, különben a kiszolgálása alatt érkezne még egy vevő, és nem lehetne ő az utolsó. Így, ha N vevő jelenik meg, az utolsó pontosan $N - 1$ perc elteltével érkezik, és ugyanekkor távozik.

Mivel a folyamat szubkritikus, vagyis $m < 1$, N várható értéke

$$\mathbb{E}N = \sum_{n=0}^{\infty} m^n = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Ebből $\mathbb{E}T = \mathbb{E}N - 1 = 2$.

f.) Óráról tudjuk, hogy N generátorfüggvénye, g_N eleget tesz a $g_N(z) = zg(g_N(z))$ egyenletnek, Vagyis minden $z \in [0, 1]$-re meg kell oldanunk y-ra az $y = zg(y)$ egyenletet:

$$y = z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}y^2\right).$$

$z = 0$-ra nyilván $y = 0$. Ha $z \neq 0$, akkor ar egyenlet y-ban másodfokú, nullára rendezve

$$\frac{1}{6}y^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{z}\right)y + \frac{1}{2} = 0.$$

Ennek megoldásai

$$y = \frac{3}{z} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{z} - 1\right)^2 - 3}.$$

Hogy az egyenlet esetleg több megoldása közül melyik a keresett generátorfüggvény, azt esetileg kell eldöntenünk. Jelen esetben pl. segít, hogy $z = 1$-ben $g_N(z) = y = 1$-nek kell lenni. Mivel $z = 1$-re $y = 3 - 1 \pm \sqrt{(3-1)^2 - 1} = 2 \pm 1$, a két megoldás közül a generátorfüggvény az, amelyikben a négyzetgyök $-$ előjellel szerepel. Összefoglalva:

$$g_N(z) = \begin{cases} \frac{3}{z} - 1 - \sqrt{\left(\frac{3}{z} - 1\right)^2 - 3} & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}.$$

A képletből elsőre nem látszik, de ez a függvény folytonos, sőt differenciálható $z = 0$-ban, mint minden generátorfüggvény. Az, hogy $g_N(0) = 0$, megfelel annak, hogy $\mathbb{P}(N = 0) = 0$, vagyis legalább 1 vevő biztosan van a szünetig, és hogy persze $T = N - 1$ is nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Így hát $N = T + 1$-ből $g_N(z) = zg_T(z)$, amiből $g_T(z) = \frac{g_N(z)}{z}$.
(Megjegyzés a szőrszálak hasogatásának kedvéért: ez a képlet csak $z \neq 0$-ra használható. A $z = 0$ beli érték kiszámolható egyrészt a generátorfüggvény folytonosságából. Másrészt kiszámolható abból is, hogy $g_T(0) = \mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}(N = 1)$, vagyis annak a valószínűsége, hogy az első vevő utód nélkül, 0 perc alatt távozik. A kételkedők ellenőrizzék le, hogy

$$\lim_{z\to 0} \frac{g_N(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left[\frac{3}{z} - 1 - \sqrt{\left(\frac{3}{z} - 1\right)^2 - 3}\right] = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

)
Mindezek alapján

$$g_T(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}\left[\frac{3}{z} - 1 - \sqrt{\left(\frac{3}{z} - 1\right)^2 - 3}\right] & \text{ha } z \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } z = 0 \end{cases}.$$

3.HF: (Beadási határidő: 2018.10.24.)

HF 3.1 a.) Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel. Számoljuk ki az $m = \mathbb{E}X$, $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left((X - m)^2\right)$ és $\delta := \mathbb{E}\left(|X - m|^3\right)$ mennyiségeket! *(Megjegyzés: a várható értéket és a szórásnégyzetet persze szabad tudni fejből vagy táblázatból. A δ kiszámolásánál viszont észnél kell lenni: mivel $X - m$* ***abszolút értéke*** *szerepel a definícióban, ez nem potyog ki pl. a generátorfüggvény-módszerből, hanem integrálni kell, az integrálban pedig figyelni kell az esetszétválasztásra.)*

b.) Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 1 bomlás történik. Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak a valószínűségét, hogy az 1000-edik bomlásra legfeljebb 15 perc 5 másodpercet kell várni!

c.) Legfeljebb mekkora lehet az előző CHT közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

Megoldás:

a.) X sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha nem} \end{cases},$$

amiből egy parciális integrálással

$$m = \mathbb{E}X = \int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 - \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1,$$

majd ezt felhasználva, egy újabb parciális integrálással

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + 2\mathbb{E}X = 2,$$

tehát

$$\sigma^2 = \mathbb{V}arX = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}X = 2 - 1 = 1.$$

A δ kiszámolásánál kicsit jobban észnél kell lenni: mivel $m = 1$,

$$\delta = \int_0^\infty |x-1|^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -(x-1)^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty +(x-1)^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Ezt sokféleképpen ki lehet számolni, egyik lehetőség az $x = y + 1$ helyettesítés, amiből

$$\delta = -\int_{-1}^0 y^3 e^{-y-1}\,\mathrm{d}y + \int_0^\infty y^3 e^{-y-1}\,\mathrm{d}y = e^{-1}\left(\int_0^{-1} y^3 e^{-y}\,\mathrm{d}y + \int_0^\infty y^3 e^{-y}\,\mathrm{d}y\right).$$

A határozatlan integrál háromszori parciális integrálással

$$\int y^3 e^{-y}\,\mathrm{d}y = -(y^3 + 3y^2 + 6y + 6)e^{-y} + c$$

(aki nem hiszi, deriválja le). Ebből

$$\begin{aligned} \delta &= e^{-1}\left(\left[-(y^3+3y^2+6y+6)e^{-y}\right]_0^{-1} + \left[-(y^3+3y^2+6y+6)e^{-y}\right]_0^{\infty}\right) = \\ &= e^{-1}(-2e + 6 - 0 + 6) = 12e^{-1} - 2 \approx 2.4146 \end{aligned}$$

b.) **1. megoldás:** Legyen $n = 1000$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re legyen X_i az az idő másodpercben, amit az i-edik bomlásra várni kell (az $i-1$-edik után). Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ az ezredik bomlás ideje. Mivel a bomlások Poisson folyamat szerint történnek, $X_i \sim Exp(1)$ és függetlenek. A CHT közelítés során S_n-et normális eloszlással közelítjük, várható értke $n \cdot m$, szórása $\sqrt{n} \cdot \sigma$ (az előző részfeladat jelöléseit felhasználva). Vagyis

$$\mathbb{P}(S_n \leq 905) \approx \Phi\left(\frac{905 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{905 - 1000}{\sqrt{1000}}\right) \approx \Phi(-3.00),$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény. A nekem meglévő táblázatban $\Phi(x)$ csak nemnegatív x-ekre van meg, ezért kihasználom, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. A $\Phi(3.00)$ értéket a táblázatból kiolvasva

$$\mathbb{P}(S_n \leq 905) \approx 1 - \Phi(3.00) \approx 1 - 0.9987 = 0.0013 = 0.13\%$$

2. megoldás: A 905 másodperc hosszú időintervallumot felosztjuk valahány, mondjuk N egyenlő részre, és Y_i-vel jelöljük az i-edik intevallumban bekövetkezett bomlások számát. (Kézenfekvő az $N = 905$ választás, de lehet bármi más pozitív egész, akár $N = 1$ is.) Ekkor $\tilde{S}_N := Y_1 + \cdots + Y_N$ az összes bomlás száma 905 másodperc alatt, és a kérdés $\mathbb{P}(\tilde{S}_N \geq 1000)$. Mivel a bomlások Poisson folyamat szerint történnek, az Y_i-k függetlenek és Poisson eloszlásúak. (A paraméterük $\lambda = \frac{905}{N}$, ami egyúttal a várható értékük és a szórásnégyzetük is, de ez végül is nem kell.) A CHT közelítés során $\tilde{S}_N$-et normális eloszlással közelítjük, várható értéke és szórásnégyzete is 905 (ami persze független attól, hogy milyen N-et választottunk). Vagyis

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_N \geq 1000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1000 - 905}{\sqrt{905}}\right) \approx 1 - \Phi(3.16).$$

Az én táblázatomban $\Phi(3.16)$ már nincs is benne, de látszik, hogy nagyobb, mint 0.999, amiből

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_N \geq 1000) \approx 1 - \Phi(3.16) \leq 0.001 = 0.1\%.$$

c.) Legyen $K = 905$, $C = 0.4748$ és használjuk az első pont-beli jelöléseket. A Berry-Esseen tétel szerint az előző pont *első megoldás*beli CHT közelítés hibája

$$\text{hiba} = \left|\mathbb{P}(S_n \le K) - \Phi\left(\frac{K - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right| \le \frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma^3} \approx \frac{0.4748 \cdot 2.4146}{\sqrt{1000}}$$
$$\approx 0.0363 = 3.63\%.$$

Vagyis a hibabecslésünk nagyságrendekkel nagyobb, mint maga a CHT becslés. Ettől még persze a tényleges hiba lehet kicsi, de ez a Berry-Esseen tételből nem derül ki.

(Megjegyzés: Az előző pont 2. megoldásbeli CHT közelítés hibájára is adható Berry-Esseen becslés, ehhez egy Poisson eloszlású Y-ra kellene kiszámolni $\mathbb{E}\left(|Y - \mathbb{E}Y|^3\right)$-t. Ez nem nehéz ha $\mathbb{E}X$ kicsi, de most nem csinálom meg.)

HF 3.2 Egy képzeletbeli városban a közvilágítás kiégett izzóit azonnal kicserélik. Az egyes izzók élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A most következő hónapban a közvilágítás izzóinak összesen 905 évnyi üzemidőt kell teljesíteni (sok lámpa van). Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a raktáron lévő 1000 csereizzó egy hónapra nem lesz elég.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x\ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$

1. megoldás: Nem tudjuk, hogy hány lámpa van, és azt se, hogy melyik mennyi ideig működik, de nem is érdekes. A lényeg, hogy 905 évnyi üzemidő alatt 1000-nél több izzó égjen ki. Ehhez nyugodtan képzelhetjük úgy, hogy az ismeretlen számú lámpa időben egymás után működik összesen 905 évet, de úgy is, hogy egyetlen lámpa működik 905 évig. Kérdés tehát annak a valószínűsége, hogy egyetlen lámpában 905 év alatt 1000-nél több izzó ég ki. *(Ehhez nagyon is kihasználtuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát: mindegy, hogy egy újonnan bekapcsolt lámpában vadonatúj izzó van, vagy az éppen most kikapcsolt lámpából szereljük át a régit.)*

Legyen $n = 1000$ és legyen X_i az i-edik izzó élettartama években. Ekkor $X_i \sim Exp(1)$ és az X_i-k függetlenek. $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ az össz-élettartam, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \le 905)$. Ezért bevezetjük az $m := \mathbb{E}X_i = 1$, $a := -\infty$, $b := \frac{905}{1000} = 0.905$ jelöléseket. Mivel $b < m$, a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_n \le 905) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{905}{1000}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)},$$

ahol I a $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye, vagyis

$$I(b) = b - \ln(b) - 1 \approx 0.00482033528.$$

Így

$$\mathbb{P}(S_n \le 905) \lessapprox e^{-1000 \cdot 0.00482033528} \approx 0.0081 = 0.81\%.$$

(Vigyázat: ha $I(b) \approx 0.00482033528$-at dőre módon $I(b) \approx 0.005$-re kerekítjük (ami ránézésre 4% hiba), a végén 0.0081 helyett 0.0067 jön ki, ami 17% hiba.)

2. megoldás: Az ismeretlen számú lámpa mindegyikében független Poisson folyamatok szerint égnek ki az izzók. Így az adott lámpa teljes üzemideje alatt kiégett izzók száma is Poisson eloszlású, a többi lámpától független. Ezért az összesen 905 évnyi üzemidő alatt kiégő izzók teljes száma is Poisson eloszlású, és a várható értéke persze 905. Vagyis a kérdés $\mathbb{P}(Z > 1000)$, ahol $Z \sim Poi(905)$. Ehhez legyen N tetszőleges pozitív egész, mondjuk $N = 905$, legyen $i = 1, 2, \ldots, N$-re $Y_i \sim Poi\left(\frac{905}{N}\right)$ és $S_N = Y_1 + \cdots + Y_N$. Így $S_N \sim Poi(905)$ és $\mathbb{P}(Z > 1000) = \mathbb{P}(S_N > 1000)$. Ezt a Cramér tétellel becsüljük: legyen $m = \mathbb{E}Y_i = \frac{905}{N}$, $a = 1000/N$ és $b = \infty$. Mivel $a > m$, a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_N > 1000) = \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} > \frac{1000}{N}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \in (a, b)\right) \lessapprox e^{-NI(a)},$$

ahol I a $\lambda = \frac{905}{N}$ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye, vagyis

$$NI(a) = N\left[\frac{1000}{N}\ln\left(\frac{\frac{1000}{N}}{\frac{905}{N}}\right) - \frac{1000}{N} + \frac{905}{N}\right] = 1000\ln\frac{1000}{905} - 95 \approx 4.82033528.$$

Örömmel látjuk, hogy ez független az N megválasztásától, és hogy a nagy eltérés becslés

$$\mathbb{P}(S_N > 1000) \lessapprox e^{-4.82033528} \approx 0.0081 = 0.81\%$$

pontosan mint az első megoldásban.

4.HF: (Beadási határidő: 2018.11.29.)

HF 4.1 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka időegységenként ugrik egyet (pontosan 10 másodpercenként). Az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ugrik egyet felfelé (kivéve, ha legalul van, mert akkor biztosan felfelé ugrik), $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig egyet lefelé (kivéve, ha legfelül van, mert akkor biztosan lefelé ugrik). Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen X_n a béka helye n ugrás után.

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc állapotterét, átmenetmátrixát és kezdeti eloszlás vektorát!

b.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a béka rögtön az elején a 101232 pályát járja be? (Úgy értve, hogy kezdetben az 1 szinten van, az első ugrás után a 0 szinten, aztán megint a 1 szinten, stb.)

d.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! (Pontosabban: az átmenetmátrixának stacionárius eloszlásait.) Szabad kihasználni, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 120 ugrás után a béka legfelül lesz? Miért?

f.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, az átmenetmátrix

$$P = P^{(X)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (0\,1\,0\,0\,0)$.

b.) A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{2/3}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2/3}{\overset{1/3}{\rightleftarrows}} 2 \underset{2/3}{\overset{1/3}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{1/3}{\rightleftarrows}} 4$$

c.) $\mathbb{P}(101232) = \pi_1 P_{10} P_{01} P_{12} P_{23} P_{32} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{81}$.

d.) Diszkrét idejű születési-halálozási folyamatban minden i-re $\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}$. Ebből esetünkben $\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{2}{3}$; $\frac{\pi_1}{\pi_2} = 2$; $\frac{\pi_2}{\pi_3} = 2$; $\frac{\pi_3}{\pi_4} = 3$; Ebből $\pi_4 = 1$ választással $\tilde{\pi} = (8; 12; 6; 3; 1)$. Ezt lenormálva kajuk az (egyetlen) stacionárius eloszlást:

$$\pi = \pi^{(X)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{30} & \frac{12}{30} & \frac{6}{30} & \frac{3}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

e.) A Markov lánc periodikus $d = 2$ szerint: a kiindulási helysre visszajutni csak páros sok lépésben lehet. Ennek megfelelően 1-ből indulva páratlan számú lépés után csak páros helyen, páros sok lépés után csak páratlan helyen lehet a béka. Ezért $\mathbb{P}(X_{120} = 4 \mid X_0 = 1) = 0$.

f.) A béka helye az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $f(i) = i$, vagyis vektor-formában $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f$$
$$= \frac{8 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{30} = \frac{37}{30} \approx 1.23$$

HF 4.2 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben.*

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A közbülső állapotokból (1, 2, 3) az elugrás rátája 6, mivel a várható tartózkodási idő $\frac{1}{6}$ perc. Legalul, a 0 állapotban viszont csak ennek $\frac{1}{3}$-a, mert nem elég, hogy csörög az óra, hanem még 5-öst vagy 6-ost is kell dobni, aminek a valószínűsége $\frac{1}{3}$. Úgyanígy legfelül, a 4 állapotban az elugrási ráta $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Vagyis a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (0\,1\,0\,0\,0)$.

b.) 0-ból csak 1-be lehet ugrani, 4-ből csak 3-ba. A többi állapotból $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ugrunk fel és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel le. Így a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c.) A $\underline{\underline{\lambda}}$ ráta-mátrix főátlójában nincs semmi, a tobbi eleme $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. A G infinitezimális generátor ugyanez, csak a főátlója úgy van kitöltve, hogy minden sorösszeg 0 legyen, vagyis

$$G_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{ha } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{ha } i = j \end{cases}.$$

Esetünkben

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hát persze: a lefelé ugrás rátája mindig 4, mert egy óracsörgés és egy 1 és 4 közötti dobás kell hozzá (kivéve legalul); a felfelé ugrás rátája pedig mindig 2, mert egy óracsörgés és egy 5-ös vagy 6-os dobás kell hozzá (kivéve legfelül).

d.) A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4$$

e.) $t = \frac{1}{60}$ rövid idő, ezért a t idejű átmenetmátrix $P(t) \approx P(0) + tP'(0) = I + tG$. Ezen belül $P_{12}(t) \approx 0 + t\lambda_{12} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$. Vagyis

$$\mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{60}\right) = 2 \,\middle|\, X(0) = 1\right) \approx \frac{1}{30}.$$

f.) Folytonos idejű születési-halálozási folyamatban minden i-re $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1}\lambda_{i+1,i}$. Ebből esetünkben $\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\pi_3}{\pi_4} = 2$; Ebből $\pi_4 = 1$ választással $\tilde{\pi} = (16; 8; 4; 2; 1)$. Ezt lenormálva kajuk az (egyetlen) stacionárius eloszlást:

$$\pi = \pi^{(Y)} = \begin{pmatrix} \frac{16}{31} & \frac{8}{31} & \frac{4}{31} & \frac{2}{31} & \frac{1}{31} \end{pmatrix}.$$

g.) $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű. Ezért a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X(t) = 4 \mid X(0) = 1) \approx \pi_4 = \frac{1}{31}.$$

h.) A béka helye az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $f(i) = i$, vagyis vektor-formában $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f$$
$$= \frac{16\cdot 0 + 8\cdot 1 + 4\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4}{31} = \frac{26}{31} \approx 0.84$$

Bónusz: Mi köze egymáshoz az előző két feladat-beli két Markov lánc stacionárius eloszlásának?

Megoldás: Az $Y(t)$ folytonos idejű Markov lánc beépített diszkrét idejű Markov lánca éppen X_n, és ennek megfelelően $Q = P^{(X)}$. A stacionárius eloszlások viszont különböznek, hiszen az Y egyes állapotokban több, máshol kevesebb időt tölt. Az X stacionárius eloszlásából úgy kaphatjuk meg Y-ét, ha a $\pi_i^{(X)}$ valószínűségeket újrasúlyozzuk a várható tartózkodási időkkel:

$$\pi_i^{(Y)} = c \cdot \frac{1}{\lambda_i} \pi_i^{(X)},$$

ahol c normáló konstans. Valóban, a fenti eredményekből $\bar{\pi}_i := \frac{1}{\lambda_i}\pi_i^{(X)}$ definícióval

$$\bar{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{4}{30} & \frac{2}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1/2}{30} & \frac{1/4}{30} \end{pmatrix},$$

ami $\pi^{(Y)}$-nak számszorosa.

5.HF: (Beadási határidő: 2018.12.06.)

HF 5.1 Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig ismeretlen. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

Megoldás:

Kétmintás egyoldali t-próbát végzünk, a nullhipotézis H0: $m_A \geq m_B$. A tesztstatisztika

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{(n_A-1)\sigma_A^{*2} + (n_B-1)\sigma_B^{*2}}{n_A+n_B-2}}} \sqrt{\frac{n_A n_B}{n_A + n_B}},$$

ahol $n_A = 9$, $n_B = 6$, $\bar{x}_A = 759$, $\bar{x}_B = 763$, $\sigma_A^{*2} = 87$, $\sigma_B^{*2} = 44.8$. Mindezt behelyettesítve

$$t = \frac{759 - 763}{\sqrt{\frac{(9-1)87 + (6-1)44.8}{9+6-2}}} \sqrt{\frac{9\cdot 6}{9+6}} \approx -0.902.$$

Ezt kell összehasonlítani az $n_A + n_B - 2 = 13$ szabadsági fokú t-eloszlás $1-\varepsilon$-kvantilisével, ahol $1-\varepsilon = 99\%$, vagyis $\varepsilon = 0.01$. A táblázat szerint a küszöbérték $K = 2.650$.

Döntés: Mivel a próbánk egyoldali és a nullhipotézis szerint $m_A \geq m_B$, a nullhipotézist akkor kell elutasítanunk, ha az A adatsor átlaga sokkal kisebb, mint a B adatsor átlaga, vagyis ha t egy túlságosan nagy abszolútértékű negatív szám. Az elutasítás feltétele tehát $t < -K$, ami *nem teljesül*, ezért a nullhipotézist *elfogadjuk.*

HF 5.2 A „Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika" tárgyból az egyes hallgatók által szerzett gyakjegy egy valószínűségi változó, lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5. A hallgatókat két kategóriába soroljuk: az I-es kategóriába azok tartoznak, akik a házi feladatok kevesebb, mint felét oldják meg (vagyis kevesebb, mint 5 pontot szereznek házi feladatból), a II-es kategóriába pedig a többiek.

A 2017 őszi félévi kurzus kivonatos eredményei megtalálhatók a 2018 őszi félév weblapján:

`math.bme.hu/~mogy/oktatas/VillamosMSc_Sztoch/VillamosMSc_Sztoch_2018osz.html`

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az I es és II-es kategória hallgatóinak gyakjegye azonos eloszlású.

Megoldás: Homogenitásvizsgálatot végzünk, hiszen mintát vettünk az I-es kategória hallgatóinak jegyeiből és a II-es kategória hallgatóinak jegyeiből is. Az egyes kategóriákban a jegyek száma táblázatba szedve:

jegy (i)	1	2	3	4	5	összesen
darabszám, I. kategória (ν_i)	21	8	22	10	2	$n = 63$
darabszám, II. kategória (μ_i)	1	1	15	26	11	$m = 54$

Ez alapján a teszt-statisztika a képletgyűjtemény szerint

$$\chi^2 = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i + \mu_i},$$

ahol $r = 5$ a lehetséges jegyek száma. Ha már az adatokat úgyis táblázatkezelővel szedtem táblázatba, ezt is a táblázatkezelővel számoltatom ki: az $a_i := \frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i + \mu_i}$ jelöléssel, a fenti táblázathoz még három sort hozzáadva egy kis képletezéssel az jön ki, hogy

i	1	2	3	4	5	sum
nu_i	21	8	22	10	2	63
mu_i	1	1	15	26	11	54
nu_i/n	0.33333	0.12698	0.34921	0.15873	0.03175	1
mu_i/m	0.01852	0.01852	0.27778	0.48148	0.2037	1
a_i	0.0045	0.00131	0.00014	0.00289	0.00227	0.01112

Vagyis $\chi^2 = nm \sum_{i=1}^{5} a_1 = 63 \cdot 54 \cdot 0.01112 \approx 37.82$

Az elfogadási küszöb a képletgyűjtemény szerint az $r-1 = 4$ szabadsági fokú χ^2 eloszlás $1-\varepsilon$ kvantilise, ahol $\varepsilon = 1 - 99\% = 0.01$. Az eloszlás-táblázat szerint a küszöb $K = 13.277$.

Döntés: mivel $\chi^2 > K$, a hipotézist *elvetjük.*