Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
1. ZH megoldások

2017 ősz, 2017.10.19 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és, ha ez nem egyértelmű, a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások:

   a.) (0 pont) Horváth Illés, páratlan heteken (péntek, IB145)

   b.) (0 pont) Kói Tamás, páratlan heteken (péntek, QBF10)

   c.) (0 pont) Patkó Richárd, páratlan heteken (péntek, IB147)

   d.) (0 pont) Patkó Richárd, páros heteken (péntek, IB147)

1. Rozi néni a barátnőjével hetente átlag kétszer beszél telefonon, a testvérével pedig átlag háromszor, teljesen véletlenszerű időpontokban. Mással nem telefonál. A barátnőjével egy beszélgetés átlagosan egy óra, a tesvérével csak egy fél. A hívások időtartama egymástól független, exponenciális eloszlású.

   a.) (1 pont) Rozi néni épp most vette fel a telefont. Mennyi a valószínűsége, hogy a testvérével beszél?

   b.) (3 pont) Rozi néni épp most vette fel a telefont. Várhatóan mennyi ideig fog beszélni?

   c.) (5 pont) Rozi néni már egy órája telefonál. Mennyi a valószínűsége, hogy a testvérével beszél?

   Megoldás: Legyen A_1 az az esemény, hogy a barátnőjével beszél, A_2 pedig az, hogy a testvérével. Legyen T a beszélgetés időtartama órában.

   a.) Mivel hosszú távon átlag 5-ből 3-szor beszél a testvérével, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{5}$.

   b.) A szöveg szerint $\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{E}(T|A_1) = 1$, $\mathbb{E}(T|A_2) = \frac{1}{2}$, továbbá $\{A_1, A_2\}$ teljes eseményrendszer. Így a teljes várható érték tétel szerint

   $$\mathbb{E}T = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{E}(T|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{E}(T|A_2) = \frac{2}{5}1 + \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

   c.) Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$ és $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 1}) = e^{-\lambda}$. Így az A_1 feltétel mellett T exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, tehát $\mathbb{P}(T \geq 1|A_1) = e^{-1}$. Ugyanígy, az A_2 feltétel mellett T exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel, tehát $\mathbb{P}(T \geq 1|A_2) = e^{-2}$. Ezek alapján a Bayes tétel szerint $B := \{T \geq 1\}$ jelöléssel

   $$\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2)} = \frac{\frac{3}{5}e^{-2}}{\frac{2}{5}e^{-1} + \frac{3}{5}e^{-2}} = \frac{3}{2e+3} \approx 0.389$$

2. Egy internetes kiszolgálóhoz percenként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

   a.) (3 pont) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?

   b.) (3 pont) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?

   c.) (3 pont) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

Megoldás:

a.) Legyen X a 10:00 és 10:02 között érkező hibás kérések száma. A hibás kérések folyamata az összes kérés Poisson-folyamatának ritkítása, így maga is Poisson folyamat. Mivel két perc alatt átlag két hibás kérés érkezik, $\mathbb{E}X = 2$, vagyis $X \sim Poi(2)$. Így $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0.135$

b.) Mivel a 20 kérés mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás,

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem hibás}) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20} \approx 0.122$$

(Alternatív megoldás: azon feltétel mellett, hogy összesen 20 kérés érkezett, a hibás kérések száma binomiális eloszlású $n = 20$, $p = \frac{1}{10}$ paraméterekkel, és

$$\mathbb{P}\left(Bin\left(20; \frac{1}{10}\right) = 0\right) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20-0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}.$$

)

c.) A hibás és a hibátlan kérések száma egymástól független, ezért a feltételes valószínűség megegyezik a feltétel nélküli valószínűséggel, amit az a.) pontban kiszámoltunk: $e^{-2} \approx 0.135$

3. Az X és Y független, negnegatív egész értékű valószínűségi változók generátorfüggvénye $g_X(z) = e^{\frac{z-1}{3}}$, illetve $g_Y(z) = e^{\frac{2(z-1)}{3}}$.

a.) (1 pont) Mennyi $\mathbb{P}(X = 0)$?

b.) (2 pont) Mennyi $\mathbb{E}(X + Y)$?

c.) (3 pont) Mennyi $\mathrm{Var}(X + Y)$?

d.) (3 pont) Mennyi $\mathbb{P}(X + Y = 10)$?

1. megoldás: A generátorfüggvényekből kiolvasható, hogy $X \sim Poi(\frac{1}{3})$ és $Y \sim Poi(\frac{2}{3})$. Mivel függetlenek, az összegük is Poisson eloszlású, a paraméterek pedig összeadódnak: $X + Y \sim Poi(1)$. Így

a.) $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.717$

b.) $\mathbb{E}(X + Y) = 1$

c.) $\mathrm{Var}(X + Y) = 1$

d.) $\mathbb{P}(X + Y = 10) = e^{-1}\frac{1^{10}}{10!} \approx 1.014 \cdot 10^{-7}$

2. megoldás: Mivel független val-változók összegének generátorfüggvénye a generátorfüggvények szorzata, $g_{X+Y}(z) = e^{\frac{z-1}{3}}e^{\frac{2(z-1)}{3}} = e^{z-1}$. A generátofüggvény elemi tulajdonságaiból

a.) $\mathbb{P}(X = 0) = g_X(0) = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.717$

b.) $\mathbb{E}(X + Y) = g'_{X+Y}(1) = e^{z-1}|_{z=1} = 1$

c.) $\mathrm{Var}(X + Y) = g''_{X+Y}(1) + g'_{X+Y}(1) - (g'_{X+Y}(1))^2 = 1 + 1 - 1 = 1$

d.) $\mathbb{P}(X + Y = 10) = \frac{1}{10!}g^{(10)}_{X+Y}(0) = \frac{1}{10!}e^{z-1}|_{z=0} = \frac{1}{10!}e^{-1} \approx 1.014 \cdot 10^{-7}$

4. (9 pont) Legyen N binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 10$, $p_N = \frac{2}{3}$ paraméterekkel. Legyen $X_1, X_2, \dots X_{10}$ Bernoulli eloszlású, $p_X = \frac{1}{2}$ paraméterrel. Adjuk meg az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ összeg generátorfüggvényét (5 pont). Mi S_N eloszlása? (4 pont)

Megoldás: $q_N := 1 - p_N = \frac{1}{3}$, $q_X := 1 - p_X = \frac{1}{2}$ jelöléssel N generátorfüggvénye $g_N(z) = (q_N + p_N z)^n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z)^{10}$, X_i generátorfüggvénye pedig $g_X(z) = q_X + p_X z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$. Mivel S_N véletlen tagszámú összeg, az ő generátorfüggvénye az N és az X_i generátorfüggvényének kompozítiója:

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z)\right)^{10} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z\right)^{10}.$$

Ebből leolvasható, hogy S_N binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel.

Alternatív megoldás: A binomiális eloszlás jelentéséből látszik, hogy ha $n = 10$ kísérletet végzünk, amelyek mindegyike $p_N = \frac{2}{3}$ valószínűséggel félig sikeres, de még mindegyiknek teljesíteni kell egy további próbát, ami csak $p_X = \frac{1}{2}$ valószínűséggel sikeres, akkor az összesített siker-valószínűség $p = p_N p_X = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Így a teljes sikerrel járó próbálkozások száma binomiális eloszlású, $n = 10$ és $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel.

5. (9 pont) Móricka hazafelé ugrál. Minden másodpercben az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egyet urgik előre, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben marad, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont kettőt urgik hátra. Kezdetben Móricka egy ugrásnyira van hazulról. Mi a valószínűsége, hogy valaha is hazaér?

Megoldás: *(Ez volt a nehéz feladat; bocs.)* Vegyük észre, hogy a feladat *ugyanaz*, mint a következő:

Egy fagyisnál minden gyerek kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ez alatt az 1 perc alatt $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nem érkezik újabb gyerek a sorba, viszont $\frac{1}{3}$ valószínűséggel érkezik egy új gyerek, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig *három.* (Így az egy perc elteltével a sor hossza $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nem változik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont kettővel nő.) Kezdetben a sorban egyetlen gyerek áll, mégpedig Móricka. Mi a valószínűsége, hogy a sor valaha is üres lesz?

Ennek megoldásához: nevezzük *nulladik generáció*-nak Mórickát egymagát. Nevezzük *első generáció*-nak a Móricka kiszolgálása alatt érkező gyerekeket. Nevezzük *második generáció*-nak az első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkező gyerekeket. És így tovább: nevezzük $(n+1)$-edik generációnak az n-edik generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkező gyerekeket. Jelöljük Z_n-nel az n-edik generáció méretét.

Így Z_n Galton-Watson elágazó folyamat $Z_0 = 1$-gyel. Ha X az egylépéses utódszám, akkor

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Ennek várható értéke $m = \mathbb{E}X = \frac{4}{3}$, generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z^3.$$

A sor akkor lesz valaha is üres, ha a folyamat kihal, vagyis a kérdés a kihalás valószínsége. Mivel $m > 1$, a folyamat *szuperkritikus*, így $\mathbb{P}(\text{kihalás}) < 1$, és számolni kell: meg kell oldani a $z = g(z)$ fixpont-egyenletet:

$$z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z^3. \tag{1}$$

Ezt nullára rendezve

$$z^3 - 2z + 1 = 0,$$

ami harmadfokú, de szerencsére tudjuk, hogy a $z = 1$ mindig megoldás, vagyis ki lehet emelni $(z-1)$-et. És valóban: $z^3 - 2z + 1 = (z-1)(z^2+z-1)$, vagyis az egyenlet

$$(z-1)(z^2+z-1) = 0,$$

amiből $z = 1$ vagy $z^2 + z - 1 = 0$. Ez utóbbi már másodfokú, gyökei $z = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Vagyis a fixpont-egyenlet gyökei

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad z_3 = 1.$$

Mivel a folyamat szuperkritiklus, a kihalás valószínűsége az egyetlen $[0,1)$-beli gyök, esetünkben

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

Alternatív megoldás, majdnem precíz, 8 pontért: Jelöljük p-vel a keresett valószínűséget. Vegyük észre, hogy ha Móricka nem 1, hanem 3 ugrásnyira lenne hazulról, akkor a hazaérés valószínűsége p^3 lenne, hiszen először el kellene jutnia 3-ról 2-re (ami p valószínűséggel sikerül előbb-utóbb), aztán 2-ről 1-re (ami megint csak p val-séggel sikerül), és végül 1-ről 0-ra. Használjunk teljes valószínűség tételt az első ugrás szerint: Legyen A_1 az az esemény, hogy elsőre előre ugrik, A_2 az az esemény, hogy elsőre helyben marad, A_3 pedig az, hogy elsőre hátra ugrik (kettőt). B pedig legyen az az esemény, hogy előbb-utóbb hazaér. Így A_1, A_2, A_3 teljes eseményrendszer, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = p$, továbbá

$$\mathbb{P}(B|A_1) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}(B|A_2) = p \quad , \quad \mathbb{P}(B|A_3) = p^3.$$

A teljes valószínűség tétel szerint

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3),$$

vagyis

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p^3$$

Örömmel látjuk, hogy ez *ugyanaz* az egyenlet, mint az előző megoldásban (1). Gyökei

$$p_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad p_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad p_3 = 1.$$

Ebből $p_1 < 0$, így nem jöhet szóba. Hogy a maradék két gyök közül melyik a tényleges valószínűség, azt érezhetjük: mivel Móricka várható értékben távolodik otthonról, a hazaérés valószínűsége 1-nél kisebb. Így

$$\mathbb{P}(B) = p = p_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$