(1) Legyen $A_i$ az az esemény, hogy az első dobás eredménye $i$, $i=1,2,\dots,6$-ra. Így $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$ teljes eseményrendszer.

Persze $E(X|A_4)=4$, $E(X|A_5)=5$ és $\mathbb{E}(X|A_6)=6$.

Másfelől $\mathbb{E}(X|A_1)=1+\mathbb{E}X$, mert ha 1-est dob, utána „kezdheti elölről", de az összeg már 1-ről indul.

Hasonlóan $\mathbb{E}(X|A_2)=2+\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}(X|A_3)=3+\mathbb{E}X$.

Így a teljes valószínűség tételből

$$\mathbb{E}X=\sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i)=\frac{1}{6}(1+\mathbb{E}X)+\frac{1}{6}(2+\mathbb{E}X)+\frac{1}{6}(3+\mathbb{E}X)+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6$$

$$=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}+\frac{3}{6}\mathbb{E}X=\frac{21}{6}+\frac{1}{2}\mathbb{E}X.$$

Ezt az egyenletet megoldva $\boxed{\mathbb{E}X=7}$

(2) a.) Legyen $T_1$ a földszinti körte élettartama, $T_1\sim Exp(\lambda)$, $\lambda=1$. (Az időt mérjük években.)

Így $\mathbb{P}(T_1>1)=1-F_{T_1}(1)=1-\left[1-e^{-\lambda\cdot 1}\right]=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 37\%$

b.) Az exponenciális eloszlás örökifjú, így ez a valószínűség is $\frac{1}{e}\approx 37\%$.

c.) 1. megoldás: Legyen $T_2$ az 1. emeleti, $T_3$ a 2. emeleti körte élettartama (mostantól mérve, ami mindegy, mert örökifjúak.).

$$\mathbb{P}\left(T_1\le\tfrac{1}{2}\vee T_2\le\tfrac{1}{2}\vee T_3\le\tfrac{1}{2}\right)=1-\mathbb{P}\left(T_1>\tfrac{1}{2}\wedge T_2>\tfrac{1}{2}\wedge T_3>\tfrac{1}{2}\right)\xlongequal[\text{és azonos eloszlásúak}]{\text{függetlenek}}$$

$$=1-\left[\mathbb{P}\left(T_1>\tfrac{1}{2}\right)\right]^3\xlongequal[\text{a.) feladatban}]{\text{mint az}}1-\left[e^{-\frac{1}{2}}\right]^3=1-e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.777=77.7\%$$

② c.) 2. megoldás: A három körte kiégési pillanatai együttesen Poisson folyamatot alkotnak $\lambda_{össz} = 3$ rátával (mert évente átlag 3 körte ég ki) Így a $t = \frac{1}{2}$ év alatt kiégő körték száma $Z_{\frac{1}{2}} \sim Pei(\lambda_{össz} \cdot t) = Pei\left(\frac{3}{2}\right)$ eloszlású, tehát

$$\mathbb{P}(Z_{1/2} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}\left(Pei\left(\tfrac{3}{2}\right) = 0\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^0}{0!} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 77.7\%$$

d.) A második emeleti körte kiégési időpontjai Poisson folyamatot alkotnak $\lambda = 1$ paraméterrel, vagyis 1 év alatt $X \sim Pei(1)$ számú körte ég ki a másodikon. Vagyis

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \left[\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)\right] =$$

$$= 1 - e^{-1}\left[\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!}\right] = 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 8.0\%$$

e.) Lásd c.) kérdés 2. megoldás:

$$\mathbb{P}(Z_{1/2} < 3) = \mathbb{P}(Z_{1/2} = 0) + \mathbb{P}(Z_{1/2} = 1) + \mathbb{P}(Z_{1/2} = 2) = e^{-\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3}{2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}} \frac{8 + 12 + 9}{8} = \frac{29}{8} e^{-\frac{3}{2}} \approx 81\%$$

③ Legyenek $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ függetlenek, $\xi_1, \dots, \xi_5 \sim B\left(\frac{1}{4}\right)$ és $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$.

Így $\xi_1 \dots \xi_5$ generátorfüggvénye $g_1(z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} z = \frac{3+z}{4}$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3$ — // — $g_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z = \frac{1+z}{2}$

Legyen $X = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

Ennek generátorfüggvénye éppen $g(z) = (g_1(z))^5 (g_2(z))^3$.

Szórásnégyzete persze $Var\, X = 5\, Var\, \xi_1 + 3\, Var\, \eta_1 = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16} = 1.6875$

③ Megjegyzés: Ez persze úgy is kijön, hogy

$$\mathrm{Var}\, X = g''(1) + g'(1) - [g'(1)]^2,$$ de ehhez számolni kell.

④ ~~Legyen N Jancsika~~

1. megoldás: A történet úgy is felfogható, hogy P. és J. független kísérletek sorozatát végzik, és minden kísérlet során megpróbálnak mindketten 6-ost dobni. [Ha P-nek nem sikerül, akkor J már meg se próbálja, de ez mindegy.] A siker-valószínűség tehát $p = \frac{1}{6}$. X az első sikerhez szükséges próbálkozások

száma $\Rightarrow$ $\boxed{X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{36}\right)}$

2. megoldás: Legyen N Jancsika dobásainak száma $N \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$. Legyen $i = 1, 2, \ldots$-re $Y_i$ Pistike dobásainak száma az $i$-edik 6-osáig (az $(i-1)$-edik-től számolva), így $Y_i \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$, és az $Y_i$-k függetlenek egymástól és N-től is. Így

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$ Pistike összes dobásainak száma, véletlen tagszámú összeg. A generátorfüggvények:

$$g_N(z) = g_Y(z) = g_{\mathrm{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)}(z) = \frac{pz}{1-qz}$$ ahol $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{p\frac{pz}{1-qz}}{1-q\frac{pz}{1-qz}} = \frac{p^2 z}{1-qz-qpz} = \frac{p^2 z}{1-(1-p^2)z},$$

vagyis $X \sim \mathrm{Geom}(p^2) = \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{36}\right)$

(5) Legyen $Z_n$ az $n$-edik generáció létszáma, ahol a 0-adik generáció Bendegúz maga, így $Z_0 = 1$, $Z_1$ a Bendegúz gyerekeinek száma, $Z_2$ az unokáinak száma, $Z_3$ a dédunokáinak száma, stb.

Ez a $Z_n$ Galton-Watson elágazó folyamat, az 1-lépéses utódszám $X$ generátorfüggvénye éppen $g(z)$.

a.) Legyen $r_n = P(Z_n = 0)$. Tudjuk, hogy $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$. A kérdés $r_3$, ezért

$$r_0 = 0$$

$$r_1 = g(r_0) = g(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.3348$$

$$r_2 = g(r_1) = g\left(\left(\frac{5}{6}\right)^6\right) = \left(\frac{5 + \left(\frac{5}{6}\right)^6}{6}\right)^6 \approx 0.4941$$

$$r_3 = g(r_2) \approx 0.5895$$

b.) $\mathbb{E}X = m = g'(1) = 5\left(\frac{5+z}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}\Big|_{z=1} = \frac{5}{6} < 1$

$\Rightarrow$ a folyamat szubkritikus, $\boxed{P(\text{kihalás}) = 1}$