Villamos MSc Sztech 2. ZH megoldások 2018 ősz 2018.11.29 (5/1) Megy

(1) Legyen X_i az i-edik ember által felvett összeg, $i=1,2,\dots,n$; $n=400$.
$S_n := X_1+\dots+X_n$ az összes felvett pénz. Tudjuk, hogy az X_i-k függetlenek és korlátosak; Számoljunk ~~eFt-ban~~: $1=a_i \le X_i \le b_i = 100$.

~~A H~~ Ebből $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2 = 400\cdot 99^2$. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}S_n = n\cdot 35 = 14000$

A Hoeffding egyenlőtlenség szerint minden $t>0$-ra

$$\mathbb{P}(S_n \ge \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2t^2}{400\cdot 99^2}\right)$$

Cél, hogy ez legfeljebb 0.001 legyen: $\exp\left(-\frac{2t^2}{400\cdot 99^2}\right) = 0.001 = 10^{-3}$

Ebből $\frac{-2t^2}{400\cdot 99^2} = -3\ln 10$, tehát $t = 99\cdot 20\sqrt{\frac{3}{2}\ln 10} = 3679.8$

Így $K := \mathbb{E}S_n + t = 17679.8$ választással

$\mathbb{P}(S_n \ge K) \le 10^{-3}$. Vagyis 17679.8 eFt elegendő.

Ha azt is tudjuk, hogy az automatából csak 1000 Ft többszöröseit lehet felvenni, akkor 17679 eFt elég.

(2) 1. megoldás: Legyen $n=1000$ és legyen $i=1,2,\dots,n$-re X_i az i-edik gyerek dobásainak száma. $S_n := X_1+\dots+X_n$. A kérdés $\mathbb{P}(S_n \le 5000)$.

Az X_i-k függetlenek és geometriai eloszlásúak $p=\frac{1}{6}$ paraméterrel, $m=\mathbb{E}X_i = \frac{1}{p} = 6$.

Így ~~a Cramér tétel szerint $a=-\infty$, $b=5$ választással~~ $a=-\infty$, $b=5$ választással $b<m$, ezért

A Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_n \le 5000) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le 5\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-1000 I(5)}$$

ahol I a $p=\frac{1}{6}$ paraméterű geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye:

$$I(5) = 5\ln\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right) + \ln\left(\cancel{6}\,\frac{5}{\cancel{6}\cdot 4}\right) = 0.0190336$$

Vagyis $\mathbb{P}(S_n \le 5000) \lessapprox e^{-19.03} \approx \underline{\underline{5.4\cdot 10^{-9}}}$

(2) 2. megoldás: A feladat ekvivalens átfogalmazása: A gyerekek összesen 5000-szer dobhatnak egy kockával. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy legalább 1000 darab 6-ost sikerül dobniuk.

Ehhez legyen $n=5000$ és legyen $i=1,2,\dots,n$-re $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik dobás 6-os} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Ezzel $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ a dobott 6-osok száma.

Az Y_i-k független azonos Bernoulli eloszlásúak $p=\frac{1}{6}$ paraméterrel.

Ezért $m := \mathbb{E}Y_i = p = \frac{1}{6}$. A Cramér tétel szerint $a=\frac{1}{5}$, $b=\infty$ választással $m<a$, vagyis

$$\mathbb{P}(S_n \geq 1000) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{5}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b)\right) \approx e^{-nI(a)} = e^{-5000\, I(\frac{1}{5})},$$

ahol I a $p=\frac{1}{6}$ paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye:

$$I\left(\tfrac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{1/5}{4/5}\cdot\frac{5/6}{1/6}\right) + \ln\left(\frac{4/5}{5/6}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{5}{4} + \ln\frac{4\cdot 6}{25} =$$

$$= \frac{1}{5}\left[5\ln\frac{24}{25} + \ln\frac{5}{4}\right] \approx 0.003806\approx16$$

[Ez érdekes módon pont az 1. megoldásbeli $I(5)$-nek az $\frac{1}{5}$-e.]

Vagyis $\mathbb{P}(S_n \geq 1000) \approx e^{-19.03} \approx \underline{5.4\cdot 10^{-9}}$

(2) 3. megoldás: Legyen n, Y_i, és S_n mint a 2. megoldásban.

Az Y_i-k függetlenek és korlátosak: $0 = a_i \leq Y_i \leq b_i = 1$, és

$\mathbb{E}S_n = n\,m = \frac{5000}{6}$. Így $t = \frac{1000}{6}$ választással a Hoeffding egyenlőtlenség szerint, mivel $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = n(1-0)^2 = 5000$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq 1000) = \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{5000}{6} + \frac{1000}{6}\right) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{5000}}$$

$$= e^{-11.1} \approx \underline{\underline{1.5\cdot 10^{-5}}}$$

③ Juliska haja 3-állapotú, diszkrét idejű Markov lánc. Legyen a jelölés 1: szőke; 2: barna; 3: vörös. Így az átmenetmátrix

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A gráf-reprezentáció:

Az állapottér: $S=\{1,2,3\}$.

Legyen december 16-a a 0-adik nap.

a.) $\mathbb{P}(X_3=2\mid X_0=2)=\mathbb{P}(2132\mid X_0=2)=P_{21}P_{13}P_{32}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$, mert 3 lépésben csak a $2\to1\to3\to2$ útvonalon lehet visszatérni 2-ből 2-be.

b.) $n:=365$ hosszú idő. A Markov lánc irreducibilis és aperiodikus (és véges állapotterű) így a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X_{365}=1\mid X_0=2)\approx\pi_1,$$

ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Mivel $(P^T-\mathbb{1})\pi^T=0$, a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{3/4} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & 0 \end{array}\right)$$

vagyis $\pi_1=\frac{2}{3}\pi_3$ és $\pi_2=\frac{4}{3}\pi_3$. $\pi_3=3$ választással $\tilde{\pi}=(2;4;3)$, ezt lenormálva az egyetlen stacionárius megoldás $\underline{\pi=\left(\frac{2}{9};\frac{4}{9};\frac{3}{9}\right)}$.

Vagyis $\mathbb{P}(X_{365}=1\mid X_0=2)\approx\pi_1=\underline{\frac{2}{9}}$.

c.) Legyen $f: S\to\mathbb{R}$ Juliska költségfüggvénye. $f(1)=1200$; $f(2)=f(3)=800$.

Avagy: $f=\begin{pmatrix}1200\\800\\800\end{pmatrix}$. Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon

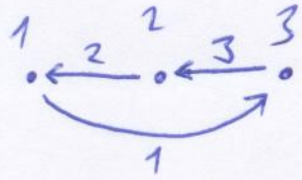
$$E_\pi f=\sum_{i\in S}\pi_i f_i=\pi f=\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1200\\800\\800\end{pmatrix}=\frac{2400+3200+2400}{9}\approx\underline{\underline{889}}$$

Az átlagos napi költség 889 Ft.

Villamos MSc Sztech 2. ZH megoldások 2018. ~~ősz~~, 2018.11.29 (5/4) Mogy

(4) Az állapottér $S=\{1,2,3\}$. Az 1-es állapotból 1 rátával ugrunk
a 3-ba, mert az egyetlen égő ilyen rátával ég ki; A 2-es álla-
potból viszont 2 rátával ugrunk 1-be, mert a két égő
valamelyiknek kiégési rátája a különkülön ráták összege. Ugya-
nígy a $3 \to 2$ ugrás rátája 3. Más ugrás nem lehet, tehát

a.) ~~A~~ A gráf-reprezentáció:



A generátor:

$$G=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

b.) $t=\frac{1}{365}$ rövid idő, így ~~$P(t) \approx P$~~ a t idejű átmenetmátrix

$$P(t) \approx P(0) + t P'(0) = \mathbb{1} + t\,G, \text{ amiből } P_{32}(t) \approx 0 + t\lambda_{32} = \frac{3}{365}.$$

Vagyis $\mathbb{P}(X(\frac{1}{365})=2 \mid X(0)=3) \approx \frac{3}{365}$.

c.) $t=10$ hosszú idő, a Markov lánc pedig véges állapotterű, irreduci-
bilis és folytonos idejű. ezért a Markov láncok alaptétele szerint
$\mathbb{P}(X(t)=2 \mid X(0)=3) \approx \pi_2$, ahol π az egyetlen stacionárius
eloszlás kiszámolása: $G^T \pi^T = 0$, vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \pi_1 = 3\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{3}{2}\pi_3 \end{array}$$

$\pi_3 = 2$ választással $\tilde{\pi} = (6 \ \ 3 \ \ 2)$, ezt lenormálva $\pi = \left(\frac{6}{11}; \frac{3}{11}; \frac{2}{11}\right)$.

Vagyis $\mathbb{P}(X(10)=2 \mid X(0)=3) \approx \frac{3}{11}$.

(5) A szórás ismert, ezért kétmintás 1 oldali <u>u-próbát</u> végzünk.

(A korr. tapasztalati szórásnégyzetet kár volt kiszámolni.)

Adatok: $n_1 = 9$, $\bar{x} = 759$; $n_2 = 6$, $\bar{y} = 763$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$, $\varepsilon = 0.01$

A nullhipotézis: $m_1 \geq m_2$.

Teszt-statisztika: $u = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \dfrac{759 - 763}{8\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}}} = \dfrac{-4}{8}\sqrt{\dfrac{9 \cdot 6}{6+9}} = \dfrac{-3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}} =$

$= -0.949$

Elfogadási küszöb: $K = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon) = \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.33$

Döntés: $u \geq -K$, ezért a nullhipotézist <u>elfogadjuk</u>.