Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH minta

2015 ősz

1. Móricka 10000-szer dob egy szabályos dobókockával.

   a.) Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak valószínűségét, hogy a dobott számok átlaga legalább 3.7.

   b.) A Berry-Esseen tétel szerint legfeljebb mennyi lehet a CHT közelítés hibája?

2. Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre $p = 0.55$ valószínűséggel ad helyes választ. Lefuttatjuk az algoritmust $n = 1000$-szer egymástól függetlenül, és megnézzük, hogy melyik válasz jön ki többször. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a végeredmény rossz – vagyis hogy a hibás válasz jön ki többször, vagy az eredmény döntetlen,

   (Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

   (ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{1}{p}\frac{1-p}{x-1}\right)$$

   (ha $x > 1$).)

3. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

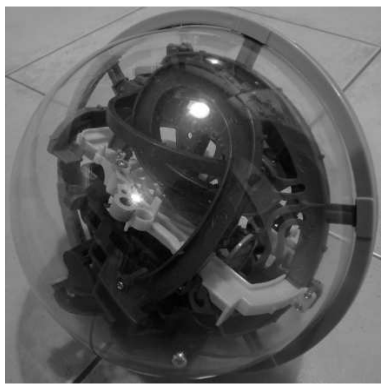
   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$

4. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet előlről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről.
   Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



Magical Intellect Ball

   a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

   b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

   c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbböször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

5. Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

   a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát. Indokoljuk.

   b.) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

   c.) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja? Miért?

   d.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve? Miért?