Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
1. pótZH megoldások

2017 ősz, 2017.12.12 10:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és, ha ez nem egyértelmű, a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások:

   a.) (0 pont) Horváth Illés, páratlan heteken (péntek, IB145)

   b.) (0 pont) Kói Tamás, páratlan heteken (péntek, QBF10)

   c.) (0 pont) Patkó Richárd, páratlan heteken (péntek, IB147)

   d.) (0 pont) Patkó Richárd, páros heteken (péntek, IB147)

1. A Műegyetem hallgatóinak a 80%-a fiú, 20%-a lány. A fiúknak 20%-a hosszú hajú, a lányoknak pedig 70%-a. Véletlenszerűen kiválasztva egy *hosszú hajú* műegyetemistát, mennyi a valószínűsége, hogy ő lány?

   Megoldás:
   Jelöljük H-val azt az eseményt, hogy egy véletlenül választott hallgató hosszú hajú, L-lel azt, hogy lány, F-fel, hogy fiú. A Bayes tétel miatt

$$\mathbb{P}(L|H) = \frac{\mathbb{P}(L)\mathbb{P}(H|L)}{\mathbb{P}(L)\mathbb{P}(H|L) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(H|F)} = \frac{\frac{2}{10}\frac{7}{10}}{\frac{2}{10}\frac{7}{10} + \frac{8}{10}\frac{2}{10}} = \frac{7}{15} \approx 46.67\%.$$

2. Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

   a.) (3 pont) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

   b.) (3 pont) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

   c.) (3 pont) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

   Megoldás: Az egyes oldalakra eső sajtóhubák száma Poisson eloszlással közelíthető, mivel sok sajtóhuba próbálkozik egymástól lényegében függetlenül, hogy pont oda essen, és ez mindegyiknek kicsi valószínűséggel sikerül. Sőt, az egyes oldalakon lévő sajtóhubák száma jó közelítéssel független, ugyanilyen megfontolásból. Ezek után csak a várható értékükre van szükség, ami persze az adott oldalszámra eső hubák átlagos száma.

   a.) Jelölje X_{13} a 13-adik oldalra eső sajtóhubák számát. A fentiek alapján ez jó közelítéssel Poisson eloszlású $\lambda = \frac{1500}{1000} = 1.5$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1.5}\frac{(1.5)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

   Emiatt

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \approx 1 - e^{-1.5} - e^{-1.5} \cdot 1.5 \approx 0.44.$$

b.) Legyen X_{42} a 42-edik oldalra eső sajtóhubák száma. A fentiek miatt X_{42} is $Poi(1.5)$ eloszlással közelíthető és X_{13}-tól jó közelítéssel független, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2 \text{ és } X_{42} = 2) \approx \mathbb{P}(X_{13} \geq 2)\mathbb{P}(X_{42} = 2) \approx 0.44 \cdot e^{-1.5}\frac{(1.5)^2}{2!} \approx 0.11.$$

c.) Sőtsőt, a vesszőhibák és az egyéb sajtóhubák száma jó közelítéssel külön-külön is Poisson eloszlású és egymástól független, ugyanilyen megfontolásból. Ezért ha Y_{13} a 13-adik oldalon lévő vesszőhibák száma, Z_{13} pedig a 13-adik oldalon lévő egyéb sajtóhubák száma, akkor jó közelítéssel $Y_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{1}{3}}{1000})$, $Z_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{2}{3}}{1000})$ és ezek függetlenek. Így

$$\mathbb{P}(Y_{13} \geq 2 \text{ és } Z_{13} = 1) \approx \left(1 - e^{-0.5}(1 + 0.5)\right)\left(e^{-1} \cdot 1\right) \approx 0.033.$$

3. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = c(z+z^2+z^4+z^5+z^8+z^{11}+z^{13}+z^{15})$.

a.) (1 pont) Mennyi a c konstans értéke?

b.) (4 pont) Mennyi X várható értéke?

c.) (4 pont) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 8)$ valószínűség?

Megoldás:

a.) $g(1) = 1$ mindig, vagyis $c = \frac{1}{8}$.

b.) $\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{8}(1 + 2z + 4z^3 + 5z^4 + 8z^7 + 11z^{10} + 13z^{12} + 15z^{14})\,|_{z=1} = \frac{59}{8} = 7.375$.
Avagy: a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ generátorfüggvényből leolvasható az X eloszlása:

k	1	2	4	5	8	11	13	15
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

amiből szintén könnyen $\mathbb{E}X = \frac{1+2+4+5+8+11+13+15}{8} = \frac{59}{8} = 7.375$.

c.) $\mathbb{P}(X = 8) = p_8$ a z^8 együtthatója a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ sorfejtésben, vagyis esetünkben $\mathbb{P}(X = 8) = \frac{1}{8}$.

4. Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

a.) (3 pont) X generátorfüggvényét,

b.) (3 pont) X várható értékét,

c.) (3 pont) X szórását.

*(Figyelem: Milyen a kockával dobott szám eloszlása, **feltéve**, hogy nem 6-os?)*

Megoldás:
Jelöljük N-nel a dobások számát, az utolsó 6-ost nem beleértve, vagyis $X \sim Geom(p = \frac{1}{6})$ (pesszimista). Így N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{p}{1-qz} = \frac{1}{6-5z}$ (a szokásos $q = 1 - p$ jelöléssel).

A keresett Y egy *véletlen tagszámú összeg*, éppen N taggal: $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, ahol $Y_1, Y_2, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, mégpedig egyenletes eloszlásúak az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. (*Figyelem*: az Y_i-k tényleg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon egyenletesek, és *nem* az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$-on, mert az Y_i eloszlása egy kockadobás eredményének *feltételes eloszlása* azon feltétel mellett, hogy az eredmény nem 6-os.)

Ezek szerint az Y_i-k generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5}{5} = \frac{1}{5}\frac{z - z^6}{1 - z},$$

így

a.) a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $g_X = g_n \circ g_Y$, vagyis

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{6 - (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)} = \frac{1}{6 - \frac{z - z^6}{1-z}}.$$

b.) A várható értéket számolhatnánk a generátorfüggvény deriválásával is, de előadásról azt is tudjuk, hogy a véletlen tagszámú összegre $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} - 1 = 5$, $\mathbb{E}Y_i = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, vagyis $\mathbb{E}X = 5 \cdot 3 = 15$.

c.) A szórást megintcsak számolhatnánk a generátorfüggvény deriváltjaiból, de előadásról azt is tudjuk, hogy $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}N(\mathbb{E}Y_i)^2 + \mathbb{E}N\mathrm{Var}Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = 5$, $\mathbb{E}Y_i = 3$, továbbá az eloszlástáblázat szerint $\mathrm{Var}N = \frac{q}{p^2} = 30$ és $\mathrm{Var}Y_i = \frac{5^2-1}{12} = 2$. Így $\mathrm{Var}X = 30 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2 = 280$, $DX = \sqrt{\mathrm{Var}X} = \sqrt{280} \approx 16.73$.

5. Legyen Z_k Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{z-1}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

Megoldás: Az egylépéses utódszámeloszlás várható értéke $m = g'(1) = 1$, vagyis a folyamat kritikus. Ezért a kihalás valószínűsége 1.