Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
1. ZH 2. pótlása – megoldások

2018 ősz, 2018.12.13 10:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások: Prokaj Rudolf, kedd 14-16 (E402) ; Prokaj Rudolf, csütörtök 14-16 (E402) ; Rokob Sándor, csütörtök 10-12 (R507); Rokob Sándor, péntek 10-12 (R515)

1. Egy kétszemélyes internetes vetélkedőjátékban Pistike ellenfelét véletlenül sorsolják ki, így az ellenfél $\frac{5}{10}$ valószínűséggel „kezdő”, $\frac{3}{10}$ valószínűséggel „haladó”, $\frac{2}{10}$ valószínűséggel pedig „profi” lesz. A kisorsolt ellenféllel azután Pistike több menetet is lejátszik. Az egyes meneteket a kezdők ellen $\frac{9}{10}$ valószínűséggel nyeri meg, a haladók ellen $\frac{5}{10}$, a profik ellen pedig $\frac{2}{10}$ valószínűséggel. Ha nem nyer, akkor veszít (döntetlen nincs).

   Pistike az első két menetet elveszítette.

   a.) Mi annak a valószínűsége, hogy az ellenfele profi?

   b.) Milyen (a feladat szövegében ki nem mondott) feltevéssel éltünk az egyes menetek kimenetelét illetően?

   Megoldás:

   a.) Jelöljük K-val azt az eseményt, hogy Pistike ellenfele kezdő, H-val azt, hogy haladó, P-val azt, hogy profi, V-vel pedig azt, hogy Pistike *az első két* menetet elveszíti. A Bayes tétel miatt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P|V) &= \frac{\mathbb{P}(P)\mathbb{P}(V|P)}{\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(V|K)+\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(V|H)+\mathbb{P}(P)\mathbb{P}(V|P)} = \\ &= \frac{\frac{2}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^2}{\frac{5}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{3}{10}\left(\frac{5}{10}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^2} = \frac{128}{208} = \frac{8}{13} \approx 61.5\%.\end{aligned}$$

   b.) Azt használtuk ki, hogy az egyes menetek kimenetelei **feltételesen függetlenek**, feltéve, hogy ki az ellenfél, vagyis pl.

$$\mathbb{P}(V|K) = \mathbb{P}(\{\text{elsőt elveszíti}\}|K) \times \mathbb{P}(\{\text{másodikat elveszíti}\}|K) = \left(\frac{1}{10}\right)^2.$$

   Figyelem: az egyes menetek kimenetelei **csak feltételesen** függetlenek, anélkül nem, hiszen (bárki kiszámolhatja)

$$\mathbb{P}(V) \neq \mathbb{P}(\{\text{elsőt elveszíti}\}) \times \mathbb{P}(\{\text{másodikat elveszíti}\}).$$

2. Egy portásnak a hatalmas zsebében 6 kulcscsomója van, mindegyiken 6 kulccsal. Minden kulcscsomón csak egyetlen olyan kulcs van, ami belemegy a portásfülke zárjába, de ebből a 6 kulcsból is csak 1 nyitja a zárat. A portás hajnalban álmosan érkezik. Vaktában kivesz egy kulcscsomót a zsebéből, majd vaktában próbálgatja a rajta lévő kulcsokat, amíg az egyik bele nem megy a zárba. Ha ekkor a zár nem nyílik, a kulcscsomót visszadobja a zsebébe, és kezdi az egészet elölről – mindaddig, amíg a zár ki nem nyílik.

   Mennyi a zár kinyitásához szükséges próbálkozások számának várható értéke? (Egy próbálkozás alatt azt értjük, amikor egy kulcsot megpróbál beledugni a zárba (és ha sikerül, megpróbálja elfordítani).)

1. megoldás: Legyen N az, hogy hanyadik zsebbe-nyúlásra veszi elő a jó kulcscsomót, X_k pedig az, hogy a k-adikra elővett kulcscsomón hanyadik próbálkozásra találja meg a zárba belemenő kulcsot. Ekkor minden X_k és N is geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így $\mathbb{E}X_k = \mathbb{E}N = \frac{1}{p} = 6$. A zár kinyitásához szükséges próbálkozások száma pedig éppen az

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$$

véletlen tagszámú összeg, ezért $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N\mathbb{E}X_1 = 6 \cdot 6 = 36$.

2. megoldás: Legyen T a zár kinyitásához szükséges próbálkozások száma. Legyen A az az esemény, hogy elsőre jó kulcscsomót vesz elő, B pedig az, hogy rosszat. Így $\{A, B\}$ teljes eseményrendszer, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{6}$. Nyilván $\mathbb{E}(T|A) = 6$.

Vegyük észre, hogy $\mathbb{E}(T|B) = 6 + \mathbb{E}T$, pont azért, mert ha rossz kulcscsomót vesz elő. akkor várhatóan 6 próbálkozás után kezdheti elölről.

Így a teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathbb{E}T = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(T|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{E}(T|B) = \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{5}{6} \cdot (6 + \mathbb{E}T) = 6 + \frac{5}{6}\mathbb{E}T.$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\mathbb{E}T = 36$. *(Az egyenlet megoldásánál kihasználtuk, hogy $\mathbb{E}T < \infty$, de ezt azért mindenki elhiszi.)*

3. Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

   a.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

   b.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

   c.) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

Megoldás: Az egyes oldalakra eső sajtóhubák száma Poisson eloszlással közelíthető, mivel sok sajtóhuba próbálkozik egymástól lényegében függetlenül, hogy pont oda essen, és ez mindegyiknek kicsi valószínűséggel sikerül. Sőt, az egyes oldalakon lévő sajtóhubák száma jó közelítéssel független, ugyanilyen megfontolásból. Ezek után csak a várható értékükre van szükség, ami persze az adott oldalszámra eső hubák átlagos száma.

a.) Jelölje X_{13} a 13-adik oldalra eső sajtóhubák számát. A fentiek alapján ez jó közelítéssel Poisson eloszlású $\lambda = \frac{1500}{1000} = 1.5$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1.5}\frac{(1.5)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Emiatt

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \approx 1 - e^{-1.5} - e^{-1.5} \cdot 1.5 \approx 0.44.$$

b.) Legyen X_{42} a 42-edik oldalra eső sajtóhubák száma. A fentiek miatt X_{42} is $Poi(1.5)$ eloszlással közelíthető és X_{13}-tól jó közelítéssel független, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2 \text{ és } X_{42} = 2) \approx \mathbb{P}(X_{13} \geq 2)\mathbb{P}(X_{42} = 2) \approx 0.44 \cdot e^{-1.5}\frac{(1.5)^2}{2!} \approx 0.11.$$

c.) Sőtsőt, a vesszőhibák és az egyéb sajtóhubák száma jó közelítéssel külön-külön is Poisson eloszlású és egymástól független, ugyanilyen megfontolásból. Ezért ha Y_{13} a 13-adik oldalon lévő vesszőhibák száma, Z_{13} pedig a 13-adik oldalon lévő egyéb sajtóhubák száma, akkor jó közelítéssel $Y_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{1}{3}}{1000})$, $Z_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{2}{3}}{1000})$ és ezek függetlenek. Így

$$\mathbb{P}(Y_{13} \geq 2 \text{ és } Z_{13} = 1) \approx \left(1 - e^{-0.5}(1 + 0.5)\right)\left(e^{-1} \cdot 1\right) \approx 0.033.$$

4. Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_X(z) = \frac{z+2z^2+3z^3+5z^5+8z^8+cz^{13}}{42}$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 10)$ valószínűség?

c.) Mi az $Y := 2X + 1$ valószínűségi változó generátorfüggvénye?

Megoldás:

a.) Mivel g_X generátorfüggvény, $g_X(1) = 1$ kell, hogy legyen, amiből $c = 23$.

b.) Legyen $k = 0, 1, 2, \ldots$-re $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. Ekkor definíció szerint

$$g_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^3 + p_3 z^3 + \cdots = \frac{1}{42}z + \frac{2}{42}z^2 + \frac{3}{42}z^3 + \frac{5}{42}z^5 + \frac{8}{42}z^8 + \frac{23}{42}z^{13},$$

amiből $p_{10} = 0$. (Magyarul: a polinom Taylor-sora önmaga.)

c.) $Y := 2X + 1$ generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} g_Y(z) &= \mathbb{E}\left(z^Y\right) = \mathbb{E}\left(z^{2X+1}\right) = z\mathbb{E}\left(\left(z^2\right)^X\right) = zg_X\left(z^2\right) \\ &= \frac{z^3 + 2z^5 + 3z^7 + 5z^{11} + 8z^{17} + 23z^{27}}{42}. \end{aligned}$$

5. Móricka kalózprogram-keresés közben egy olyan weblapra jutott, ami miatt a böngészőjének ablakai újabb és újabb ablakokat nyitnak meg maguktól: minden ablak, mielőtt Mórickának sikerül bezárnia, $\frac{3}{10}$ valószínűséggel 1 új ablakot nyit, $\frac{3}{10}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{4}{10}$ valószínűséggel pedig egyet sem. Nevezzük nulladik generációnak a kezdetben nyitva lévő egyetlen ablakot, első generációnak az ez által megnyitott ablakokat, második generációnak az első generáció tagjai által megnyitottakat, stb.

a.) Adjuk meg a 2. generáció elemszámának generátorfüggvényét.

b.) Mennyi a 10. generáció elemszámának várható értéke?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Mórickának még a 2. generáció megjelenése előtt sikerül kiirtani a felugró ablakokat?

d.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Mórickának előbb-utóbb sikerül minden ablakot bezárni?

Megoldás: Legyen Z_n az n-edik generáció elemszáma. Ekkor Z_n Galton-Watson elágazó folyamat $Z_0 = 1$-gyel. Legyen $X = Z_1$ az első generáció elemszáma. $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4}{10}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{10}$ és $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{10}$, így X generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10}z + \frac{3}{10}z^2,$$

várható értéke $m = \frac{4}{10} \cdot 0 + \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{9}{10}$.

a.) Z_2 generátorfüggvénye

$$g_2(z) = g(g(z)) = \frac{4}{10} + \frac{4}{10}\left(\frac{4}{10} + \frac{3}{10}z + \frac{3}{10}z^2\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{4}{10} + \frac{3}{10}z + \frac{3}{10}z^2\right)^2.$$

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m_{10} = m^{10} = 0.9^{10} \approx 0.349.$

c.) Legyen $r_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, így a kérdés r_2. Tudjuk, hogy $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$, így

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0 \\
r_1 &= g(r_0) = g(0) = \frac{4}{10} \\
r_2 &= g(r_1) = g\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10}\frac{4}{10} + \frac{3}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{400 + 120 + 48}{1000} = 0.568
\end{aligned}$$

d.) Mivel $m < 1$, a folyamat szubkritikus, a kihalás valószínűsége 1.